Extrait de l'X 2010
MP

Notations et conventions

Soit G un groupe fini (noté multiplicativement) de cardinal $|G|$. On note $\mathbf{1}_G$ l'unité de G. On rappelle que tout élément g de G vérifie $g^{|G|} = \mathbf{1}_G$ et on admet que si p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe $g \in G \setminus \{\mathbf{1}_G\}$ tel que $g^p = \mathbf{1}_G$.

Si E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E et Id_E l'identité de E. Si φ un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(\varphi)$ la trace de φ et $\det(\varphi)$ son déterminant.

Si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, et V un sous-espace vectoriel de E, on note V^G l'ensemble des vecteurs fixés par G : $V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G,\, g(v) = v\}$. On dit que V est **stable** par G si quels que soient $g \in G$, $v \in V$, on a $g(v) \in V$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0\}$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients complexes et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

I – Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(E)$

1. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$. Démontrer que, pour tout $g \in G$, g est diagonalisable et que, si G est commutatif, tous les éléments de G sont diagonalisables dans une même base.

Indice: Pour la 2ème question, vous pouvez raisonner par récurrence sur la dimension de E.

II– Lemme de Schur

Notons $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $E = \mathbf{C}^n$. Notons I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On appelle homothétie une matrice de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbf{C}$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$ l'application :

$$i(B) : \begin{cases} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ M \mapsto BMB^{-1} \end{cases} .$$

2. Montrer que $i : B \mapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$, et que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

On note $\widetilde{G}$ l'image par i de G et $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $i(B)(M) = M$ pour tout B dans $\widetilde{G}$.

3. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}\,(M)$ sont des sous-espaces stables par G.

4. On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$, démontrer que M est soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est de dimension 1.

5. Soient M, $N \in \mathcal{A}$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{A}$ suivant, $\Phi : X \mapsto MXN$.

Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(N)$.

6. Soit $P = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} B$.

6a. Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.

6b. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(P) = E^G$ et en déduire que $\dim(E^G) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\,(B)$.

7. **On suppose** que E **est irréductible pour** G**.**

Soit X dans $\mathcal{A}$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de G. Démontrer que

$X = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(X) I_n$.

Fin extrait