Correction

1.a $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ donc $f(0)=0$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)+f(x)=f(0)$ donc $f(-x)=-f(x)$. Ainsi f est impaire.

1.b Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$. Puisque $f(0)=0$ donc $f(nx)=nf(x)$ pour $n=0$.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.
Au rang $n+1$, $f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)$ et en vertu de l'hypothèse de récurrence,
$f((n+1)x)=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$. Récurrence établie.
Pour $n\in\mathbb{Z}^-$, $n=-p$ avec $p\in\mathbb{N}$ et alors $f(nx)=f(-px)=-f(px)=-pf(x)=nf(x)$.

1.c Pour $u\in\mathbb{Q}$, on peut écrire $u=p/q$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$. $f(u)=f(p\times 1/q)=pf(1/q)$. Or
$f(1)=f(q/q)=qf(1/q)$ donc $f(1/q)=a/q$ puis $f(u)=f(p/q)=a\,p/q=au$.

1.d Pour $x\in\mathbb{R}$, il existe (u_n) suite de nombres rationnels convergent vers x. Par continuité $f(u_n)\to f(x)$.
D'autre part $f(u_n)=au_n\to ax$ donc par unicité de la limite on obtient $f(x)=ax$.

2.a φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\varphi(x)=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x+1}$ donc φ est strictement croissante. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	1

donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]-1,1\right[$.

$$\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)}=\frac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^y+1)+(\mathrm{e}^y-1)(\mathrm{e}^x+1)}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y+1)+(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^y-1)}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-1}{\mathrm{e}^{x+y}+1}=\varphi(x+y).$$

2.b $h(x+y)=\varphi^{-1}(g(x+y))=\varphi^{-1}\left(\dfrac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}\right)$. Or $g(x)=\varphi(h(x))$ et $g(y)=\varphi(h(y))$ donc

$$h(x+y)=\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(h(x))+\varphi(h(y))}{1+\varphi(h(x))\varphi(h(y))}\right)=\varphi^{-1}(\varphi(h(x)+h(y)))=h(x)+h(y).$$

2.c La fonction h est continue, donc en introduisant $a=h(1)$, on a par la question 1., pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$h(x)=ax$ et donc $g(x)=\varphi(h(x))=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-1}{\mathrm{e}^{ax}+1}$. Notons qu'inversement une telle fonction est solution du problème initial posé.