# Nombres réels

**Exercice 1 :**

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Supposons que $sup(A) > 0$.
Montrer que

$$\exists a \in A,\ a > 0$$

**Exercice 2 :**

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1) Supposons que A et B sont bornées, et que $A \subset B$. Montrer que
   a) $inf(B) \leq inf(A)$
   b) $sup(A) \leq sup(B)$
2) Supposons que $[\ \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b\ ]$. Montrer que
   a) sup(A) et inf(B) existent.
   b) $sup(A) \leq inf(B)$
3) Supposons que A et B sont majorées. Montrer que
   a) $sup(A), sup(B)$ et $sup(A \cup B)$ existent.
   b) $sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$
4) Supposons que A et B sont majorées.
   Notons $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que
   a) $sup(A + B)$ existe.
   b) $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

**Exercice 3 :**

Montrer que

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

**Exercice 4 :**

Déterminer, en justifiant leurs existences, la borne supérieure et la borne inférieure de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad B = \{(-1)^n + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad C = \{1 + \tfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

**Exercice 5 :**

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

2) En déduire la partie entière $\lfloor S \rfloor$, où $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$

**Exercice 6 :**

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Posons $m = \lfloor nx \rfloor$ . Soient $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r \leq n-1$ tels que $m = nq + r$.

1) Montrer que

i) $\begin{cases} 0 \leq k < n-r \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$

ii) $\begin{cases} n-r \leq k \leq n-1 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q+1$

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

**Exercice 7 :**

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

L'objectif est de montrer que $f = id_{\mathbb{R}}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.

2) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$

3) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$

4) a) Montrer que : $\forall \varepsilon \geq 0,\ f(\varepsilon) \geq 0$.

   b) En déduire que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

   b) En déduire que $f = id_{\mathbb{R}}$.

6) Redémontrer que $f = id_{\mathbb{R}}$ en raisonnant par l'absurde et en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

# Nombres réels

**Exercice 1 :**

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Supposons que $sup(A) > 0$. Montrer que

$$\exists a \in A,\ a > 0$$

Solution

On veut montrer que :

$$\exists a \in A \text{ tel que } a > 0$$

Notons $sup(A) = \alpha$. On a $\alpha > 0$ par hypothèse.

D'après la caractérisation de la borne supérieure, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a > \alpha - \varepsilon$$

Prenons $\underline{\varepsilon = \alpha}$.

On a $\varepsilon > 0$.

Alors $\exists a \in A$ tel que $a > \underbrace{\alpha - \varepsilon}_{=0}$

Et donc $\exists a \in A$ tel que $a > 0$ $\square$

**Exercice 2 :**

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1) Supposons que A et B sont bornées, et que $A \subset B$. Montrer que
   a) $inf(B) \leq inf(A)$
   b) $sup(A) \leq sup(B)$
2) Supposons que $[\ \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b\ ]$. Montrer que
   a) sup(A) et inf(B) existent.
   b) $sup(A) \leq inf(B)$
3) Supposons que A et B sont majorées. Montrer que
   a) $sup(A), sup(B)$ et $sup(A \cup B)$ existent.
   b) $sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$
4) Supposons que A et B sont majorées.
   Notons $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que
   a) $sup(A + B)$ existe.
   b) $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

Solution

Réflexes à avoir

$\sup(A) \leq M \iff (\forall x \in A,\ x \leq M)$

le plus petit des majorants

M un majorant de A

$m \leq \inf(A) \iff (\forall x \in A,\ m \leq x)$

le plus grand des minorants

un minorant

1 a) $inf(B) \leq inf(A)$ ?

$m \leq inf(A) \Leftrightarrow (\forall x \in A, m \leq x)$

Il suffit de vérifier que :

$(\forall x \in A, \inf(B) \leq x)$

Soit $x \in A$.

Alors $x \in B$ car $A \subset B$

D'où $\inf(B) \leq x$ □

b) $sup(A) \leq sup(B)$

$Sup(A) \leq M \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \leq M)$

Il suffit de vérifier que :

$(\forall x \in A, x \leq Sup(B))$

Soit $x \in A$.

Alors $x \in B$ car $A \subset B$

D'où $x \leq Sup(B)$ □

2) Supposons que $[\ \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b\ ]$. Montrer que

a) sup(A) et inf(B) existent.

i) Sup(A) existe ?

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Reste à vérifier qu'elle est majorée.

On a $(\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b)$

D'où $A$ est majorée par n'importe quel élément de $B$. $\square$

ii) $\inf(B)$ existe ?

Pareil à i) $\square$

2) Supposons que $[\ \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b\ ]$. Montrer que

a) sup(A) et inf(B) existent.

b) $\boxed{sup(A) \leq inf(B)}$ ?

$\boxed{\sup(A) \leq M \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \leq M)}$

Il suffit de vérifier que :

$$(\forall x \in A,\ x \leq \inf(B))$$

Soit $x \in A$. M. que $x \leq \inf(B)$.

$\boxed{m \leq \inf(A) \Leftrightarrow (\forall x \in A, m \leq x)}$

Il suffit de vérifier que

$$\forall b \in B,\ x \leq b$$

Ce qui est vérifié par hypothèses, vu que $\begin{cases} x \in A \\ b \in B \end{cases}$. $\square$

3) Supposons que A et B sont majorées. Montrer que

a) $sup(A), sup(B)$ et $sup(A \cup B)$ existent. ?

b) $sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$

i) Sup(A) existe :

Car $A \neq \phi$ et A majorée $\square$

ii) Sup(B) existe :

Car $B \neq \phi$ et B majorée $\square$

iii) sup(A∪B) existe ?

$A \cup B \neq \phi$ car $A \neq \phi$.

$(A \cup B)$ majorée ; en effet :

Soit $x \in A \cup B$.

Alors $x \in A$ ou $x \in B$

$\Rightarrow (x \leq sup(A)$ ou $x \leq sup(B))$

$\Rightarrow x \leq max(sup(A), sup(B))$

Alors $\boxed{\forall x \in A \cup B, \ x \leq max(sup(A), sup(B))}$ ☆

D'où $(A \cup B)$ est majorée.

Ainsi $(A \cup B)$ est non vide et majorée.

D'où sup(A∪B) existe $\square$

3) Supposons que A et B sont majorées. Montrer que

a) $sup(A), sup(B)$ et $sup(A \cup B)$ existent.

b) $sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$

On a : $\boxed{\forall x \in A \cup B \ , \ x \leq max(sup(A), sup(B))}$ ☆

$\boxed{sup(A) \leq M \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \leq M)}$

rappel

D'où $sup(A \cup B) \leq max(sup(A), sup(B))$

Reste à vérifier l'autre inégalité :

$$\boxed{max(sup(A), sup(B)) \leq sup(A \cup B)}$$

On sait que $\begin{cases} max(sup(A), sup(B)) = sup(A) \\ \text{ou} \\ max(sup(A), sup(B)) = sup(B) \end{cases}$

Alors il suffit de vérifier que :

$$\begin{cases} sup(A) \leq sup(A \cup B) \\ sup(B) \leq sup(A \cup B) \end{cases}$$

i) M que : $sup(A) \leq sup(A \cup B)$

$\boxed{sup(A) \leq M \Leftrightarrow (\forall x \in A, x \leq M)}$

rappel

Alors il suffit de vérifier que :

$(\forall x \in A, x \leq sup(A \cup B))$

Soit alors $x \in A$.

Alors $x \in A \cup B$ (car $A \subset A \cup B$)

D'où $x \leq \sup(A \cup B)$

$\boxed{\text{CQFD}}$

ii) Pareil pour $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$

4) Supposons que A et B sont majorées.
Notons $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que

a) $\boxed{sup(A + B) \text{ existe.}}$

b) $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

i) $A+B \neq \phi$ ?

On a $A \neq \phi$ et $B \neq \phi$

Alors il existe un couple $(a,b) \in A \times B$.

Par suite $(a+b) \in A+B$.

ii) $(A+B)$ majoré ?

Soit $x \in A+B$.

$\exists (a,b) \in A \times B,\ x = a+b$

Or $a \leq \sup(A)$ et $b \leq \sup(B)$

Alors $x = a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Ainsi : $\left(\forall x \in A+B,\ x \leq \sup(A) + \sup(B)\right)$ ☆

De i) et ii) on tire que $\sup(A+B)$ existe. □

4) Supposons que A et B sont majorées.
Notons $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que

a) $sup(A + B)$ existe.

b) $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

M. que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

D'après la caractérisation de la borne supérieure il s'agit de montrer que :

i) $\forall x \in A+B,\ x \leq \sup(A) + \sup(B)$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A+B,\ \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x$

Pour i)

C'est ☆ démontré en a) □

Pour ii $\left(\forall \varepsilon>0, \exists x \in A+B,\ \sup(A)+\sup(B)-\varepsilon < x\right)$

Soit $\varepsilon>0$.

D'après la caractérisation de la borne sup pour $\frac{\varepsilon}{2}>0$ :

$$\begin{cases} \exists a \in A,\ \sup(A)-\frac{\varepsilon}{2} < a \\ \exists b \in A,\ \sup(B)-\frac{\varepsilon}{2} < b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sup(A)+\sup(B)-\varepsilon < a+b$$

D'où l'existence de $x=a+b \in A+B$ tel que :

$$\sup(A)+\sup(B)-\varepsilon < x$$

$\boxed{\text{CQFD}}$

Enfin :

$$\boxed{\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)}$$

**Exercice 3 :**

Montrer que

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Solution

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Solution

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. M. que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Il y a plusieurs manière de la traiter, en voici une :

On a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

$$\Rightarrow \lfloor x \rfloor + y \leq x + y < \lfloor x \rfloor + 1 + y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor \lfloor x \rfloor + 1 + y \rfloor \\ \text{car la fonction partie entière est } \underline{\text{croissante}}. \end{cases}$$

$$\text{Or} \begin{cases} \lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \text{ car } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor \lfloor x \rfloor + 1 + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor y \rfloor \text{ car } \lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ $\square$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ ?

Solution

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. M que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Là encore on peut faire par au moins deux méthodes.

Voici une :

On sait que :

$$\exists\, 0 \leq \varepsilon < 1 \text{ tel que } x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$$

Alors $nx = n\lfloor x \rfloor + n\varepsilon$

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \ ?$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\varepsilon \rfloor \\ \text{Car } n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right\rfloor \\ \text{Car } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \star$$

Vérifions que $\left\lfloor \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$ :

On a $0 \leq \varepsilon < 1 \Rightarrow 0 \leq n\varepsilon < n$

$$\Rightarrow 0 \leq \lfloor n\varepsilon \rfloor \leq n-1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} < 1$$

D'où $\left\lfloor \frac{\lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$

☆ devient : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

$\square$

**Exercice 4 :**

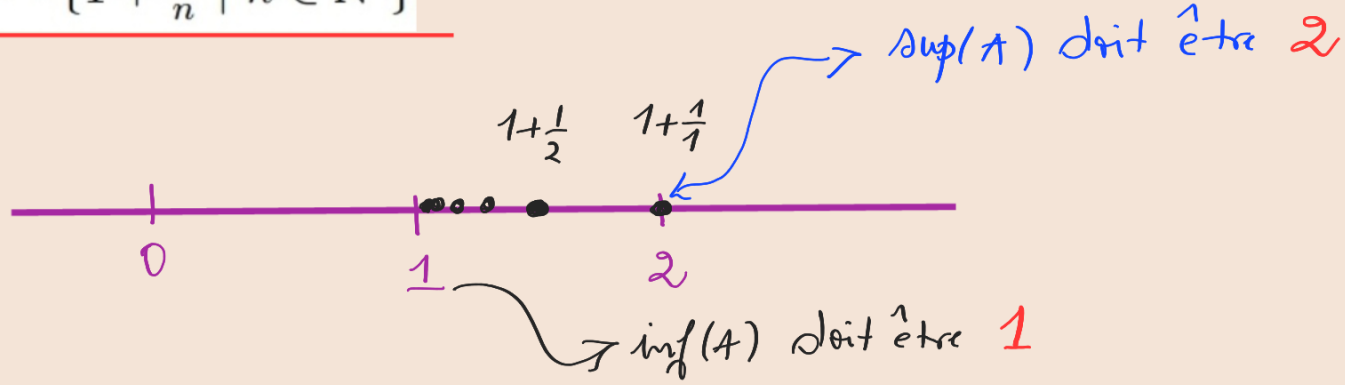
Déterminer, en justifiant leurs existences, la borne supérieure et la borne inférieure de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad B = \{(-1)^n + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad C = \{1 + \tfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

**Solution**

Pour conjecturer les valeurs de sup(A) et inf(A), je conseille de faire un schéma sur la droite réelles où placer les premiers éléments correspondant aux premiers entiers afin de voir la répartition des éléments de A.

1) $A = \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$




On verra ainsi que $1+\frac{1}{1} = \max(A)$ *et* $\inf(A) = 1$.

→ $1+\frac{1}{1} \in A.$ et $\forall n \geq 1, 1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{1}$.

donc c'est le plus grand élément de A, et enfin sup(A)=max(A)=2 □

→ inf(A)=1 , en effet :

On utilise la caractérisation de la borne inférieure de A , on a :

i) $\forall n \geq 1, 1 \leq 1+\frac{1}{n}$.

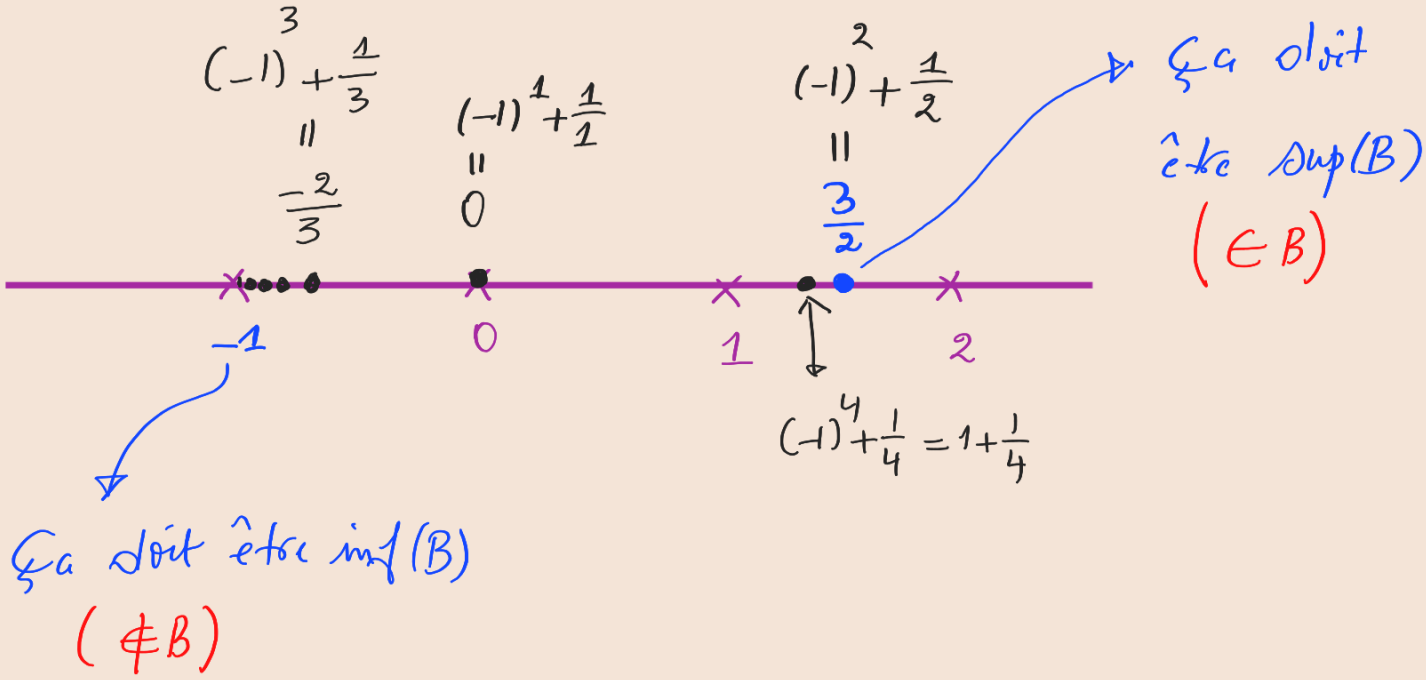
ii) Soit $\varepsilon \succ 0$. Montrons l'existence de $n \geq 1$ tel que $1+\frac{1}{n} \prec 1+\varepsilon$.

Càd que $n \succ \frac{1}{\varepsilon}$.

Et $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$ *convient*. (ou d'après la propriété d'Archimède)

□

2) $B = \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$




i) $\boxed{\text{Pour } \sup(B) = \max(B) = 1 + \frac{1}{2} :}$

→ on a $1 + \frac{1}{2} \in B$ ( *pour* $n = 2$ )

→ on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2}$ .

On vérifie par exemple que cette inégalité est vraie pour les entiers pairs et impairs.

→ enfin max(B) = $1 + \frac{1}{2}$ ( =sup(B)).

ii) $\boxed{\text{Pour : } \inf(B) = -1 :}$

→ $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq -1$ : est simple à voir

→ Soit $\varepsilon \succ 0$. Montrons l'existence de $n \geq 1$ tel que $(-1)^n + \frac{1}{n} \prec -1 + \varepsilon$ .

une idée consiste à viser un entier impaire ;

càd qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \prec -1 + \varepsilon$ .

Et on a :

$$(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \prec -1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} \prec \varepsilon \Leftrightarrow 2n+1 \succ \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \succ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

Alors il s'agit de justifier l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.

Ce qui est vrai d'après la propriété d'Archimède. $\square$

**Exercice 5 :**

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

2) En déduire la partie entière $\lfloor S \rfloor$, où $S = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Solution

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *montrons d'abord la* $1^{ère}$ *inégalité* : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \prec \frac{1}{2\sqrt{n}}$

l'autre inégalité se traitera de la même manière.

*On a* $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \prec \frac{1}{2\sqrt{n}}$ *car* $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \succ 2\sqrt{n}$

2) En déduire la partie entière $\lfloor S \rfloor$, où $S = \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ?

Solution

$$E(S) = E\left(1 + \sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 + E\left(\sum_{k=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ Calculons } E\left(\sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}\right):$$

$$\text{On a : } \forall\ 2 \le n \le 10000,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{10000} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}_{=\sqrt{10001} - \sqrt{2}\ (\text{téléscopie})} \prec \sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec \underbrace{\sum_{n=2}^{10000} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)}_{=\sqrt{10000} - \sqrt{1} = 99\ (\text{téléscopie})}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10001} - \sqrt{2} \prec \sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}} \prec 99$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\sqrt{10001} - 2\sqrt{2}}_{\sim 197{,}18} \prec \sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}} \prec 198$$

$$\Rightarrow 197 \prec \sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}} \prec 198$$

$$\Rightarrow E\left(\sum_{n=2}^{10000} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 197$$

$$\text{Conclusion : } E(S) = 198$$

**Exercice 6 :**

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Posons $m = \lfloor nx \rfloor$ . Soient $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r \leq n-1$ tels que $m = nq + r$.

1) Montrer que

i) $\begin{cases} 0 \leq k < n-r \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$

ii) $\begin{cases} n-r \leq k \leq n-1 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q+1$

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Solution

1) Montrer que

i) $\begin{cases} 0 \leq k < n-r \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k < n-r$.

M. que $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$

On a $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$

$\Rightarrow m \leq nx < m+1$

$\Rightarrow \frac{m}{n} \leq x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$

Et $0 \leq k < n-r \Rightarrow 0 \leq k \leq n-r-1$

$x \in \mathbb{R}$

$\lfloor nx \rfloor = m = nq + r$

où $0 \leq r \leq n-1$

$0 \leq k < n-r$

hypothèses

$\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$ ?

D'où $\begin{cases} 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{r}{n} - \frac{1}{n} \\ \frac{m}{n} \leq x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \end{cases}$

$x \in \mathbb{R}$
$\lfloor nx \rfloor = m = nq + r$
où $0 \leq r \leq n-1$
$0 \leq k < n-r$

hypothèses

$\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$ ?

$\Rightarrow \frac{m}{n} \leq x + \frac{k}{n} < \frac{m-r}{n} + 1$

$\Rightarrow q + \frac{r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + 1$

car $m = nq + r$

Or $r \geq 0$, alors $q \leq x + \frac{k}{n} < q + 1$

Enfin : $\boxed{\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q}$

$\square$

ii) $\begin{cases} n - r \leq k \leq n - 1 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q + 1$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n - r \leq k \leq n - 1$

M. que $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q + 1$

$\lfloor nx \rfloor = m = nq + r$
où $0 \leq r \leq n-1$
$n - r \leq k \leq n - 1$

hypothèses

$\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q + 1$ ?

On a $\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$

$\Rightarrow m \leq nx < m + 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{n} \leqslant x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

$\lfloor nx \rfloor = m = nq + r$
où $0 \leqslant r \leqslant n-1$
$n-r \leqslant k \leqslant n-1$

↳ hypothèses

$$\text{Et } n-r \leqslant k \leqslant n-1 \Rightarrow 1 - \frac{r}{n} \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

$\boxed{\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q+1 \ ?}$

Par sommation, on aura :

$$1 + \frac{m-r}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < \frac{m}{n} + 1$$

Or $m = nq + r$, alors $\frac{m-r}{n} = q$ et $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$

D'où $\quad q+1 \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{r}{n} + 1$

$\lfloor nx \rfloor = m = nq + r$
où $0 \leqslant r \leqslant n-1$
$n-r \leqslant k \leqslant n-1$

↳ hypothèses

Or $r \leqslant n-1$, alors $\frac{r}{n} \leqslant \frac{n-1}{n} \leqslant 1$

$\boxed{\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q+1 \ ?}$

$$\Rightarrow q+1 \leqslant x + \frac{k}{n} < q + 1 + 1$$

$$\Rightarrow q+1 \leqslant x + \frac{k}{n} < q+2$$

Enfin $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = q+1$ $\square$

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor$ ?

On a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{i)} \begin{cases} 0\le k<n-r \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} & \Rightarrow \left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q \\ \text{ii)} \begin{cases} n-r\le k\le n-1 \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} & \Rightarrow \left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = q+1 \end{array}}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1}\underbrace{\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor}_{=q} + \sum_{k=n-r}^{n-1}\underbrace{\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor}_{=q+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r-1} q + \sum_{k=n-r}^{n-1}(q+1)$$

$$= q\,(n-r-1-0+1) + (q+1)\,(n-1-(n-r)+1)$$

$$= q\,(n-r) + (q+1)\,r$$

$$= nq+r$$

$\lfloor nx\rfloor = m = nq+r$

On a

$$= \lfloor nx\rfloor$$

$\square$

**Exercice 7 :**

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

L'objectif est de montrer que $f = id_{\mathbb{R}}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.
2) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$
3) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$
4) a) Montrer que : $\forall \varepsilon \geq 0,\ f(\varepsilon) \geq 0$.

   b) En déduire que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

   b) En déduire que $f = id_{\mathbb{R}}$.
6) Redémontrer que $f = id_{\mathbb{R}}$ en raisonnant par l'absurde et en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Solution

Solution

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

On a ça

1) Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.

i) On a $f(0+0) = f(0) + f(0)$

D'où $\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0)$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

On a ça

ii) On a $f(0) = f(-1+1)$

$\Rightarrow 0 = f(-1) + f(1)$ (car $f(0) = 0$)

$\Rightarrow 0 = f(-1) + 1$ (car $f(1) = 1$)

D'où $f(-1) = -1$

2) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$

i) Montrons d'abord que :

$(\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n)$

Faisons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

On a $f(0) = 0$ d'après 1°)

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supp que $f(n) = n$ et M que $f(n+1) = n+1$.

On a :

$f(n+1) = f(n) + f(1)$

$= \boxed{n+1}$ (car $f(1) = 1$ et $f(n) = n$)

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

On a ça

ii) M que : $\forall m \in \mathbb{Z}^-,\ f(m) = m$

Soit $m \in \mathbb{Z}^-$, On a :

$f(m) = f((-1) \times (-m))$

$= f(-1) \times f(-m)$

Or $f(-1) = -1$ et $f(-m) = -m$ car $(-m) \in \mathbb{N}$

D'où $\boxed{f(m) = (-1) \times (-m) = m}$

3) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$

Soit $r \in \mathbb{Q}$. M que $f(r) = r$

Posons $r = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

On a ça

On a : $m = rn$

$\Rightarrow f(m) = f(rn)$

$\Rightarrow f(m) = f(r) \times f(n)$

$\Rightarrow m = f(r) \times n$ (car $f(m) = m$ et $f(n) = n$)

D'où $f(r) = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow \boxed{f(r) = r}$

4) a) Montrer que : $\forall \varepsilon \geq 0,\ f(\varepsilon) \geq 0$.

b) En déduire que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

On a ça

Soit $\varepsilon \geq 0$. On a :

$f(\varepsilon) = f(\sqrt{\varepsilon} \times \sqrt{\varepsilon}) = f(\sqrt{\varepsilon}) \times f(\sqrt{\varepsilon}) = (f(\sqrt{\varepsilon}))^2 \geq 0$ □

4) a) Montrer que : $\forall \varepsilon \geq 0,\ f(\varepsilon) \geq 0$.

b) En déduire que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supp que $x \leq y$ et M que $f(x) \leq f(y)$.

On a

$$f(y) = f((y-x)+x)$$

$$= f(y-x) + f(x)$$

Or $f(y-x) \geq 0$ car $y-x \geq 0$

D'où $f(y-x) + f(x) \geq f(x)$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) \quad \square$$

---

5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ (voir Cahier de Cours)

b) En déduire que $f = id_{\mathbb{R}}$. (càd : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$)

Soit $x \in \mathbb{R}$. M que $f(x) = x$.

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor nx \rfloor \leq nx \leq \lfloor nx \rfloor + 1)$

$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)\right)$, car $f$ croissante.

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq f(x) \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right)$

Car $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et $\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{Q}$ et que $(\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right) = x$

Alors d'après gendarmes, on a $\boxed{f(x) = x}$ $\square$

---

6) Redémontrer que $f = id_{\mathbb{R}}$ en raisonnant par l'absurde et en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. M que $f(x) = x$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que $f(x) \neq x$.

Alors $f(x) < x$ ou $x < f(x)$

Supp que $f(x) < x$

Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) < r < x$

$\Rightarrow f(r) \leq f(x)$ (car $f$ croissante et $r < x$)

$\Rightarrow r \leq f(x)$, car $f(r) = r$

Ce qui est absurde, car $f(x) < r$ $\square$

Supp que $x < f(x)$

Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < f(x)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(r)$ (car $f$ croissante et $x < r$)

$\Rightarrow f(x) \leq r$, car $f(r) = r$

Ce qui est absurde, car $r < f(x)$ $\square$

Enfin $f(x) = x$ $\square$