Moyenne arithmético-géométrique

Préliminaire :

Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(indice : on rappelle qu'une fonction réelle monotone définie sur un intervalle admet en tout point intérieur à cet intervalle une limite à droite et une limite à gauche que l'on peut comparer à la valeur de la fonction en ce point.)

Partie I

Soit a et b deux réels positifs ou nuls.

On définit deux suites de réels positifs (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases}u_0=a\\ v_0=b\end{cases}\text{ et, pour tout } n\in\mathbb{N} : \begin{cases}u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\end{cases}.$$

1. Déterminer ces deux suites ainsi que leurs limites dans les cas suivants

1.a $a=b$.

1.b $a=0$ et $b\in\mathbb{R}^+$ quelconque.

2. On revient au cas général et on se propose d'établir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

2.a Montrer que, pour tout $n\geq 1$, $u_n\leq v_n$, $u_n\leq u_{n+1}$ et $v_{n+1}\leq v_n$.

2.b Etablir que, pour tout $n\geq 1$, $0\leq v_n-u_n\leq\dfrac{v_1-u_1}{2^{n-1}}$.

2.c Conclure.

La limite commune à ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Celle-ci sera désormais notée $\mathcal{M}(a,b)$.

2.d Donner $\mathcal{M}(a,a)$ et $\mathcal{M}(0,b)$ pour $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$.

Dans la suite de ce problème, nous pourrons noter $u_n(a,b)$ et $v_n(a,b)$ les suites précédentes.

3. On se propose d'établir quelques propriétés utiles de la fonction $(a,b)\mapsto\mathcal{M}(a,b)$.

3.a Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\mathcal{M}(b,a)=\mathcal{M}(a,b)$.

3.b Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\forall\lambda\in\mathbb{R}^+,\mathcal{M}(\lambda a,\lambda b)=\lambda\mathcal{M}(a,b)$.

3.c Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\mathcal{M}(a,b)=\mathcal{M}(\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2})$.

3.d Montrer que $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\sqrt{ab}\leq\mathcal{M}(a,b)\leq\dfrac{a+b}{2}$.

Partie II

On considère ici la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\mathcal{M}(1,x)$.

1. Donner $f(0)$ et $f(1)$.

2. On désire établir la croissance de la fonction f.
Pour cela on considère $0 \leq x \leq y$ deux réels.

2.a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(1,x) \leq u_n(1,y)$ et $v_n(1,x) \leq v_n(1,y)$.

2.b Conclure.

3. On étudie ici la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

3.a Montrer que $\forall x > 0, f(x) = x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3.b En exploitant le préliminaire, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3.c Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \frac{1+x}{2} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

3.d En déduire que f est continue en 0.

4. On étudie ici le comportement de f en $+\infty$.

4.a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}$.

4.b Etudier la limite de f en $+\infty$.
Préciser la branche infinie de f en $+\infty$.

5. Représenter sur un même graphe les allures des fonctions $x \mapsto f(x), x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$.

6. En exploitant l'encadrement du II.4.a, étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.