Correction

Partie I

1. Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0, u_0=0\geq -1$, pour $n=1, u_1=1\geq 0$, pour $n=2, u_2=1\geq 1$ et pour $n=3, u_3=2\geq 2$.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 2$ et $n+1$:
$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \underset{HR}{\geq} n+(n-1)=2n-1=n+(n-1)\geq n+1$ puisque $n\geq 2$.
Récurrence établie. Clairement $u_n\to+\infty$.

2.a Par récurrence simple sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1, u_2u_0-u_1^2=-1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$.
$u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2=(u_{n+1}+u_n)u_n-u_{n+1}(u_n+u_{n-1})=u_n^2-u_{n+1}u_{n-1}\underset{HR}{=}-(-1)^n=(-1)^{n+1}$
Récurrence établie

2.b Pour $U=(-1)^n u_{n+1}$ et $V=(-1)^{n+1}u_n$ on a :
$u_{n-1}U+u_nV=1$ et par cette égalité de Bézout : $u_{n-1}\wedge u_n=1$.

3.a Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$ on a $\forall p\in\mathbb{N}^*, u_p=u_0.u_{p-1}+u_1u_p$ car $u_0=0$ et $u_1=1$.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 0$.
$\forall p\in\mathbb{N}^*, u_{n+1+p}=u_{n+(p+1)}=u_nu_p+u_{n+1}u_{p+1}$ donc
$u_{n+1+p}-(u_{n+1}u_{p-1}+u_{n+2}u_p)=(u_n-u_{n+2})u_p+u_{n+1}(u_{p+1}-u_{p-1})=-u_{n+1}u_p+u_{n+1}u_p=0$
Récurrence établie.

3.b Posons $d=\text{pgcd}(u_{n+p},u_p)$ et $\delta=\text{pgcd}(u_n,u_p)$.
On a $\delta\mid u_n$ et $\delta\mid u_p$ donc $\delta\mid u_{n+p}=u_nu_{p-1}+u_{n+1}u_p$.
Ainsi $\delta\mid u_p$ et $\delta\mid u_{n+p}$ donc $\delta\mid d$.
Inversement, on a $d\mid u_p$ et $d\mid u_{n+p}$ donc $d\mid u_nu_{p-1}=u_{n+p}-u_{n+1}u_p$.
Or $d\mid u_p$ et $u_p\wedge u_{p-1}=1$ donc $d\wedge u_{p-1}=1$.
Puisque $d\mid u_nu_{p-1}$ et $d\wedge u_{p-1}=1$ on a $d\mid u_n$.
Ainsi $d\mid u_n$ et $d\mid u_p$ donc $d\mid\delta$.
Par double divisibilité : $d=\delta$.

3.c $\text{pgcd}(u_{n+2p},u_p)=\text{pgcd}(u_{(n+p)+p},u_p)=\text{pgcd}(u_{n+p},u_p)=\text{pgcd}(u_n,u_p)$
Par récurrence, on obtient que $\forall q\in\mathbb{N}, \text{pgcd}(u_{n+qp},u_p)=\text{pgcd}(u_n,u_p)$.
Ainsi, si r est le reste de la division euclidienne d'un entier $a\in\mathbb{N}$ par un entier $b\in\mathbb{N}^*$ on a :
$\text{pgcd}(u_a,u_b)=\text{pgcd}(u_b,u_r)$ (en prenant $n=r$, $b=p$ et $a=qb+r$; sachant $q\in\mathbb{N}$).

3.d Suivons l'algorithme d'Euclide calculant $n\wedge p$:
On pose $a_0=n$, $a_1=p$, puis on réalise les divisions euclidiennes suivantes tant que les restes obtenus sont non nuls :
$a_0=a_1q_1+a_2$, $a_1=a_2q_2+a_3,\ldots,$ $a_{m-2}=a_{m-1}q_{m-1}+a_m$ puis $a_{m-1}=a_mq_m+0$ avec $a_m=\text{pgcd}(n,p)$.
Or, de part 3.c, on obtient
$\text{pgcd}(u_n,u_p)=\text{pgcd}(u_{a_0},u_{a_1})=\text{pgcd}(u_{a_1},u_{a_2})=...=\text{pgcd}(u_{a_m},u_0)=\text{pgcd}(u_{a_m},0)=u_{a_m}$,
d'où le résultat voulu.

Partie II

1. $E\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
La suite nulle (0) vérifie la relation de récurrence et appartient donc à E.

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $(a_n),(b_n)\in E$.
$\alpha.(a_n)+\beta.(b_n)=(\alpha a_n+\beta b_n)$ et
$\forall n\in,\alpha a_{n+2}+\beta b_{n+2}=\alpha(a_{n+1}+a_n)+\beta(b_{n+1}+b_n)=(\alpha a_{n+1}+\beta b_{n+1})+(\alpha a_n+\beta b_n)$
donc $\alpha.(a_n)+\beta.(b_n)\in E$.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $(a_n),(b_n)\in E$.
$\varphi(\alpha.(a_n)+\beta.(b_n))=(\alpha a_0+\beta b_0,\alpha a_1+\beta b_1)=\alpha\varphi((a_n))+\beta\varphi((b_n))$
donc φ est une application linéaire.
Soit $(a_n)\in\ker\varphi$.
On a $a_0=0$ et $a_1=0$.
Par récurrence double, on montre $\forall n\in\mathbb{N},a_n=0$ puisque $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.
Ainsi $\ker\varphi=\{(0)\}$ et donc φ est injective.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Pour (a_n) définie par $a_0=x$, $a_1=y$ et $\forall n\in\mathbb{N},a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, la suite (a_n) est bien définie, elle est élément de E et on a $\varphi((a_n))=(x,y)$. Ainsi φ est surjective.
Finalement φ est bijective et c'est donc un isomorphisme de R - espace vectoriel .
Il en découle $\dim E=\dim\mathbb{R}^2=2$.

3.a $(q^n)\in E\Leftrightarrow\forall n\in\mathrm{N},q^{n+2}=q^{n+1}+q^n\Leftrightarrow q^2=q+1$
Les solutions de cette dernière équation sont $q_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3.b Les suites (q_1^n) et (q_2^n) sont éléments de E.
Montrons qu'elles forment une famille libre.
Supposons $\alpha(q_1^n)+\beta(q_2^n)=(0)$ i.e. $\forall n\in\mathbb{N},\alpha q_1^n+\beta q_2^n=0$.
Pour $n=0$, on obtient $\alpha+\beta=0$ d'où $\beta=-\alpha$
Pour $n=1$, on obtient $\alpha q_1+\beta q_2=0$ ce qui donne $\alpha(q_1-q_2)=0$.
Puisque $q_1\neq q_2$, on conclut $\alpha=0$ puis $\beta=0$.
La famille $((q_1^n),(q_2^n))$ est une famille libre formée de $2=\dim E$ éléments de E, c'est donc une base de E .

3.c Puisque $(u_n)\in E$: $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,(u_n)=\alpha.(q_1^n)+\beta.(q_2^n)$ i.e. $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\alpha.q_1^n+\beta.q_2^n$.
Pour $n=0$, on obtient $\alpha+\beta=0$ d'où $\beta=-\alpha$.
Pour $n=1$, on obtient $\alpha q_1+\beta q_2=1$ d'où $\alpha=\dfrac{1}{q_1-q_2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Ainsi $\forall n\in\mathrm{N},u_n=\dfrac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$.