

$AGM_n(\mathbb{K})$.

L'endom can associé à A est $f \in \mathcal{L}(?)$.

td que :

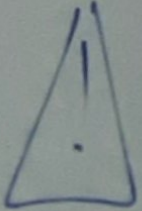
$$A = ?$$

$AGM_n(\mathbb{K})$.

L'endomorphisme canonique α à A est $\mathcal{L}_B(\mathbb{K}^n)$

td que:

$$A = \underset{B}{\text{mat}}(\mathcal{L})$$

où B la base canonique de \mathbb{K}^n 

Notons $X = \text{mat}_B(x)$ et $A = \text{mat}_B(f)$. On a :

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda \cdot X$$

→ De cette dernière équivalence, on tire la proposition suivante :

Prop 7

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E .

f et $\text{mat}_B(f)$ ont les mêmes valeurs propres.

2) Une matrice carrée et son automorphisme canoniquement associé ont les mêmes valeurs propres.

Prop 8

Avec les notations ci-dessus, et si $\lambda \in S_p(f) (= S_p(A))$, on a :

1) $x \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow X \in E_\lambda(A)$

$$M \in M_n(K)$$

$$\det(-M) = ? \det(M)$$

$$\det(\lambda \cdot M) = ? \det(M)$$



11/1

$M \in M_n(K)$

$$\det(-M) = (-1)^n \det(M)$$

$$\det(\lambda \cdot M) = \lambda^n \cdot \det(M)$$

d'où

$$Sp(A) = \{0, 1, 2\}$$

2) Déterminons les sous-espaces propres de A

Il s'agit de déterminer les sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

i) Détermination de $E_2(A)$

$$A \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\ker(A) = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$$

$$\ker(A) \text{ seu de } M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2(A) = ?? \neq E_2(A) = \text{Vect}(?)$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}). \text{ On a :}$$

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow X \in \ker(A - 2I_3)$$

$$\Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) Détermination de $E_2(A)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a:

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow X \in \ker(A - 2I_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$A \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\ker(A) = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) / AX = 0\}$$

$\ker(A)$ seu de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2(A) = ?? \quad \# \quad E_2(A) = \text{Vect}(?)$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a:

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow X \in \ker(A - 2I_3)$$

$$\Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"recte"

$\forall x \in \text{Im}(f), f^2(x) = -x$

2) Justifier que $\text{Im}(f)$ est stable par f .
C'est clair (du cours)

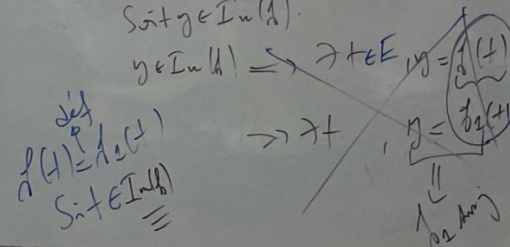
3) Montrer que $f|_{\text{Im}(f)}$ est un automorphisme de $\text{Im}(f)$.

On a: $\forall x \in \text{Im}(f), f^2(x) = -x$
 $\Rightarrow \forall x \in \text{Im}(f), f(x) = -x$

3) $f|_{\text{Im}(f)} \in \mathcal{L}(\text{Im}(f))$
 $f|_{\text{Im}(f)}$ bijectif ?

a) $f|_{\text{Im}(f)}$ inj? (Récip)
 $f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0$
 $\Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $f|_{\text{Im}(f)}$ surj? ($f|_{\text{Im}(f)} \in \mathcal{L}(\text{Im}(f))$)
Soit $y \in \text{Im}(f)$.



On a:
 $f^2(x) = -x$
 $\forall x \in \text{Im}(f)$

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $\text{rg}(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, c'ad $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} f_1 \in \mathcal{L}(\text{Im}(f)) \\ f_1^2 = -\text{id}_{\text{Im}(f)} \end{pmatrix}$$



4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $\text{rg}(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, c'ad $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} f_{\perp} \in \mathcal{L}(\text{Im}(f)) \\ f_{\perp}^2 = -\text{id}_{\text{Im}(f)} \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \det(f_{\perp}^2) = \det(-\text{id}_{\text{Im}(f)})$$

$$\Rightarrow (\det(f_{\perp}))^2 = (-1)^{\dim(\text{Im}(f))}$$

$$\Rightarrow (-1)^{\text{rg}(f)} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(f) \text{ est pair}$$

$$\det(\lambda I_E) = \lambda^{\dim E}$$

Fin Exercice 1

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $\text{rg}(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, c'est à dire $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

$$\text{On a } \begin{cases} f_E \in \mathcal{L}(\text{Im}(f)) \\ f_E^2 = -\text{id}_{\text{Im}(f)} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \det(f_E^2) = \det(-\text{id}_{\text{Im}(f)})$$

$$\det(\lambda I_E) = \lambda^{\dim E}$$

$$\Rightarrow (\det(f_E))^2 = (-1)^{\dim(\text{Im}(f))}$$

$$\Rightarrow (-1)^{\text{rg}(f)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(f) \text{ est pair}$$

Fin exercice

$$\begin{cases} \int_1^2 (x) = -\pi \\ \text{Aut } \int \end{cases}$$

$$\rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = \det(f) \times \det(g)$$

$$\begin{cases} \det(A^k) = (\det(A))^k \\ \det(f^k) = (\det(f))^k \end{cases}$$

$$\rightarrow \det(\lambda \cdot I_E) = \lambda^n \text{ avec } n = \dim(E)$$

$$\det(I_E) = 1$$

icher.org

resp 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Supp que $\chi_A(x)$ est scindé dans \mathbb{K} . On a:

- 1) $\text{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres de A comptés avec leurs multiplicités.
- 2) $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de A comptés avec leurs multiplicités.

Autrement dit :

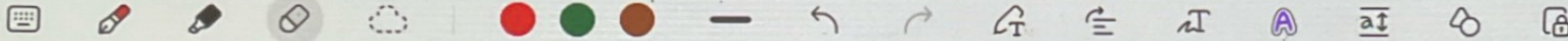
Supposons $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distinctes deux à deux.

On a :

1) $\text{tr}(A) =$ [blacked out]

2) $\det(A) =$ [blacked out]

Pr. ELAMIF



resp 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Supp que $\chi_A(x)$ est scindé dans \mathbb{K} . On a :

- 1) $\text{tr}(A)$ est la somme des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.
- 2) $\text{det}(A)$ est le produit des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

29/80

Autrement dit :

Supposons $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distincts deux à deux.

On a :

$$1) \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^s m_i \lambda_i$$

$$2) \text{det}(A) = \prod_{i=1}^s \lambda_i^{m_i}$$

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux
tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

Montrer que f est l'identité ou la conjugaison
complexe.