$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'endom can associé à A est $f \in \mathcal{L}(?)$

tel que :

$$A = \;?$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'endom can associé à A est $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$

tel que :

$$A = \mathrm{mat}_B(f)$$

où B la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Notons $X = \underset{B}{mat}(x)$ et $A = \underset{B}{mat}(f)$. On a :

$$\boxed{f(x) = \lambda x \iff AX = \lambda . X}$$

De cette dernière équivalence, on tire la proposition suivante :

Prop 7

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E.

f et $\underset{B}{mat}(f)$ ont les mêmes valeurs propres.

2) Une matrice carrée et son endomorphisme canoniquement associé ont les mêmes valeurs propres.

?

Prop 8

Avec les notations ci-dessus, et si $\lambda \in Sp(f)$ $(= Sp(A))$, on a :

1) $x \in E_\lambda(f) \iff X \in E_\lambda(A)$

Pr. ELAMIRI Cours dispo

$M \in M_n(\mathbb{K})$.

$\det(-M) = \;?\; \det(M)$

$\det(\lambda \cdot M) = \;?\; \det(M)$

$M \in M_n(\mathbb{K})$.

$$\det(-M) = (-1)^n \det(M)$$

$$\det(\lambda \cdot M) = \lambda^n \cdot \det(M)$$

D'où $\boxed{Sp(A) = \{0, 1, 2\}}$

2) Déterminons les sous-espaces propres de A

Il s'agit de déterminer les sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

i) Détermination de $E_2(A)$

$A \in M_3(\mathbb{R})$

$\ker(A) = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX = 0\}$

$\ker(A)$ sev de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$E_2(A) = ??$ # $E_2(A) = \mathrm{Vect}(?)$

"recette"

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$X \in E_2(A) \Leftrightarrow X \in \ker(A - 2I_3)$

$\Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} & \star & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ldots = 0 \\ \ldots = 0 \\ \ldots = 0 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

i) Détermination de $E_2(A)$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$X\in E_2(A) \iff X\in \ker(A-2I_3)$$

$$\iff (A-2I_3)X=0$$

$$\iff \begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}2x-2y-2z=0\\ x-2y-z=0\\ 3x-2y-3z=0\end{cases}$$

$A\in M_3(\mathbb{R})$

$\ker(A)=\{X\in M_{3,1}(\mathbb{R}) \,/\, AX=0\}$

$\ker(A)$ sev de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(A)\iff A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

$E_2(A)=??$ # $E_2(A)=\mathrm{Vect}(?)$

"Réflexe"

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X\in E_2(A)\iff X\in\ker(A-2I_3)$$

$$\iff (A-2I_3)X=0$$

$$\iff \begin{pmatrix} & \star & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\cdots=0\\ \cdots=0\\ \cdots=0\end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Sol Réduction

$= x$

2) $\boxed{\forall x \in Im(f),\ f^2(x) = -x}$

2) Justifier que $Im(f)$ est stable par f.

C'est claire (du cours)

3) Montrer que f_1 est un automorphisme de $Im(f)$.

On a : $\forall x \in Im(f),\ f^2(x) = -x$

$\Rightarrow \forall x \in Im(f),\ f_1^2(x) = -x$

On a : $f_1^2(x) = -x \quad \forall x \in Im(f)$

3) $f_1 \in \mathcal{L}(Im(f))$.

f_1 bijectif ?

a) f_1 inj ? (Ker f)

$f_1(x) = 0 \Rightarrow f_1^2(x) = 0$

$\Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$

b) f_1 surj ? $(f_1 \in \mathcal{L}(Im(f)))$

Soit $y \in Im(f)$.

$y \in Im(f) \Rightarrow \exists t \in E,\ y = f(t)$

$f(t) \overset{déf}{=} f_1(t)$ Soit $t \in Im(f)$

$\Rightarrow \exists t,\ y = f_1(t)$

f_1 surj

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, càd $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.

On a $\begin{pmatrix} f_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(f)) \\ f_1^2 = -id_{\mathrm{Im}(f)} \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, càd $Im(f)$ est de dimension finie.

On a $\begin{cases} f_1 \in \mathcal{L}(Im(f)) \\ f_1^2 = -id_{Im(f)} \end{cases}$

D'où $\det(f_1^2) = \det(-id_{Im(f)})$

$\det(\lambda I_E) = \lambda^{\dim E}$

$\Rightarrow (\det(f_1))^2 = (-1)^{\dim(Im(f))}$

$\Rightarrow (-1)^{rg(f)} \geqslant 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{rg(f) \text{ est paire}}$

Fin Exercice 1

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, càd $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie.

On a $\begin{cases} f_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(f)) \\ f_1^2 = -id_{\mathrm{Im}(f)} \end{cases}$

D'où $\det(f_1^2) = \det(-id_{\mathrm{Im}(f)})$

$\det(\lambda I_E) = \lambda^{\dim E}$

$\Rightarrow (\det(f_1))^2 = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}(f))}$

$\Rightarrow (-1)^{rg(f)} \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{rg(f) \text{ est paire}}$

$\boxed{\text{Fin Exercice 1}}$

On a : $f_1^2(x) = -x$ $\forall x \in \mathrm{Im}(f)$

$\rightarrow \det(A.B) = \det(A).\det(B)$

$\rightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$

$\rightarrow \begin{cases} \det(A^k) = (\det(A))^k \\ \det(f^k) = (\det(f))^k \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \det(\lambda . I_E) = \lambda^n, \text{ avec } n = \dim E \\ \det(I_E) = 1 \end{cases}$

Prop :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Supp que $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$. On a :

1) $tr(A)$ est la somme des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

2) $det(A)$ est le produit des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

Autrement dit :

Supposons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distinctes deux à deux.

On a :

1) $tr(A) =$ [redacted]

2) $det(A) =$ [redacted]

Prop :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Supp que $\chi_A(x)$ est scindé dans $\mathbb{K}$. On a :

1) $tr(A)$ est la somme des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

2) $det(A)$ est le produit des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

Autrement dit :

Supposons $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distinctes deux à deux.

On a :

1) $tr(A) = \sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i$

2) $det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_i}$

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = x$$

Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.