CNC 2013

Mathématiques 1

Corrigé par : **AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques MPSI CPGE Khouribga

Première partie : Résultats préliminaires

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   (a) D'abord $|e^{-zt}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$:
   • Si $\operatorname{Re}(z) < 0$, alors la fonction $t \mapsto e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, dans ce cas la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ n'est pas integrable sur $\mathbb{R}^+$.
   • Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, alors $t^2 e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, autrement dit au voisinage de $+\infty$, $|e^{-zt}| = o(\frac{1}{t^2})$, dans ce cas la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   • Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, dans ce cas $|e^{-zt}| \sim 1$ au voisinage de $+\infty$, donc la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   On en déduit alors que $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

   (b) La fonction $t \mapsto \cos(\gamma t)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\gamma}$, non constante, donc n'admet pas de limite en $+\infty$: en effet; supposons par l'absurde qu'il admet une limite,et notons ℓ cette limite, qui est alors finie (en tenant compte la continuité et la périodicité), pour $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos(\gamma t) = \cos(\gamma t + nT)$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\cos(\gamma t) = \ell$, autrement dit la fonction $t \mapsto \cos \gamma t$ est constante, ce qui n'est pas le cas.
   Remarque : *Avec le même raisonnement , on démontre que si $\gamma \neq 0$, alors la fonction $t \mapsto \sin \gamma t$ n'admet pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$.*
   $t \mapsto e^{-iyt}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, les deux fonctions $t \mapsto \cos yt$ et $t \sin(yt)$ possèdent des limites dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $y = 0$ (d'après ce qui précède).

   (c) Si $z = 0$, $e^{-zt} = 1$, et l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt$ diverge.
   Si $z \neq 0$, pour $u \in \mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\int_0^u e^{-zt}dt = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}e^{-ux}e^{-\imath uy}$.
   Il vient que ; si $\operatorname{Re}(z) > 0$, alors $\displaystyle\int_0^u e^{-zt}dt$ admet une limite lorsque u tend vers $+\infty$, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt$ converge, et de plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt = \frac{1}{z}$.
   Si $\operatorname{Re}(z) = 0$, par la question précédente, l'intégral diverge.
   Si $\operatorname{Re}(z) < 0$, on a $|e^{-ux}e^{-\imath uy}| = e^{-ux}$ tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers $+\infty$, das ce cas l'intégral diverge.
   On en déduit alors que ; l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt$ converge si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

2. (a) F dérivable, immédiate. De plus pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = e^{-z_0 x} f(x)$ continue.
   On aussi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et finie, donc F est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|F(t)| \leq M$, par la suite $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $|e^{-(z-z_0)t}F(t)| \leq Me^{-(\mathrm{Re}(z-z_0))t}$, et comme $\mathrm{Re}(z-z_0) > 0$, alors $t \mapsto e^{\mathrm{Re}(z-z_0)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, ainsi la fonction $t \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Pour $x \geq 0$, à l'aide d'une intégration par parties, on a $\displaystyle\int_0^x e^{-zt}f(t)dt = \int_0^x e^{-(z-z_0)t}F'(t)dt = e^{-(z-z_0)x}F(x)+(z-z_0)\int_0^x e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$, le premier terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (car $|e^{-(z-z_0)x}f(x)| \leq Me^{-\mathrm{Re}(z-z_0)x}$), d'autre par $t \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$ converge, ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)dt$ converge et (avec un passage à la limite),

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)dt = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{(z-z_0)t}F(t)dt$$

3. **Un Lemme de Lettlewood :**

(a) Pour $x > 0$ et $\alpha \in]0,1[$ on a :

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha x) - \psi(x) &= \int_x^{\alpha x} \psi'(t)dt \\
&= -\int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)'\psi'(t)dt \\
&= -(\alpha x - \alpha x)\psi'(\alpha x) + (\alpha x - x)\psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)dt \\
&= (\alpha - 1)x\psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)dt
\end{aligned}$$

(b) Pour $x > 0$ et $\alpha \in]0,1[$, on a $(\alpha-1)x\psi'(x) = \psi(\alpha x) - \psi(x) - \displaystyle\int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)dt$, donc

$$\begin{aligned}
|x\psi'(x)| &\leq \frac{1}{1-\alpha}(|\psi(\alpha x)| + |\psi(x)|) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha x}^x \frac{t-\alpha x}{t^2}|t^2\psi''(t)|dt \\
&\leq \frac{2}{1-\alpha}\sup_{\alpha x \leq t \leq x} |\psi'(t)| + \frac{M}{(1-\alpha)(\alpha x)^2}\int_{\alpha x}^x (t-\alpha x)dt \\
&\leq \frac{2}{1-\alpha}\sup_{0 \leq t \leq x} |\psi(t)| + \frac{1-\alpha}{2\alpha^2}M
\end{aligned}$$

(c) Soit ε un réel strictement positif.
On a $\displaystyle\lim_{\alpha \to 1} \frac{1-\alpha}{2\alpha^2}M = 0$, donc il existe $\alpha_0 \in]0,1[$, tel que $\dfrac{1-\alpha_0}{2\alpha_0}M \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, et comme ψ est continue en 0, alors $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{2}{1-\alpha_0}\psi(t) = 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que $\forall t \in [0,\eta]$ on ait $\dfrac{2}{1-\alpha_0}|\psi(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, par la suite $\forall x \in [0,\eta]$, $\dfrac{2}{1-\alpha_0}\displaystyle\sup_{0 \leq t \leq x} |\psi(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, il vient que $\forall x \in [0,\eta]$; $|x\psi'(x)| \leq \varepsilon$.

Deuxième partie :
Exemples et propriétés de la transformée de Laplace

1. On a $e^{-zt}f_\lambda(t) = e^{-(z-\lambda)t}$, donc z est dans le domaine de définition de $L(f_\lambda)$ si, et seulement si, l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t}dt$ converge si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z-\lambda) > 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(\lambda)$.
   Lorsque $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(\lambda)$, on a $L(f_\lambda)(z) = \dfrac{1}{z-\lambda}$.
2. **Abscisse de convergence**
   Si le domaine de définition de $L(f)$ est vide, dans ce cas $\sigma = +\infty$, convient.
   Si le domaine de définition de $L(f)$ n'est pas vide, notons $A = \{\mathrm{Re}(z)\ ;\ L(f)(z) \text{ existe}\}$ c'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide.
   1^{er} Cas : A n'est pas minorée, soit $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z_0) < \mathrm{Re}(z)$ et $L(f)(z_0)$ existe. Puisque l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z_0t}f(t)dt$ converge et $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$, d'après la question 1.2.3, l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)dt$ converge.
   2^{eme} Cas : A minorée, notons σ sa borne inférieure, par définition de σ, si $\mathrm{Re}(z) < \sigma$ alors l'intégral $L(f)(z)$ n'existe pas.si $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z) > \sigma$, par définition de la borne inférieure, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0) \geq \sigma$ et $L(f)(z_0)$ existe, toujours par le résultat de la question 1.2.3 l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t)dt$ converge, ou encore $L(f)(z)$ existe.
3. **Quelques propriétés**

> **Attention !**
> Pour la continuité et la dérivabilité de $L(f)$, on ne peut rien faire , par la première formule de $L(f)(z)$, (oui,... pourquoi ?), par ce que "personnellement ", pour la domination je peur du "méchant" module $|f|$, même s'il est multiplier par un exponentiel, (*la fonction f n'est pas supposée d'ordre exponentiel*), mais avec la formule de la question 1.2.3, on peut faire beaucoup de choses, vous allez aimez bien la fonction F, elle est gentille (dérivable, **bornée**. . .), aussi multipliée par l'exponentiel, le jeu compte sur les parties réelles (qui vivent sur la tête des exponentiels). . .
> $L(f)$, puis allez à la formule de 1.2.3 maintenant on peut dérivier, après, c'est le retour et bien sûr avec une intégration par parties.

   (a) Continuité de $L(f)$ sur le demi plan $\Pi(\sigma(f))$
   Soit α un réel strictement supérieur à $\sigma(f)$, et montrons que $L(f)$ est continue sur le demi plan $\Pi(\alpha) = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$, pour ce faire on fixe un complexe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma(f) < \mathrm{Re}(z_0) < \alpha$ (pourquoi z_0 ?. . . $L(f)(z_0)$ existe et aussi z_0 loin du demi plan $\Pi(\alpha)$. . .).
   Pour $z \in \Pi(\alpha)$, on a $L(f)(z) = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$, où F est la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{-z_0t}f(t)dt$ (*Attention la fonction F dépend aussi de z_0.*)
   La fonction $z \mapsto (z-z_0)$ est continue sur $\Pi(\alpha)$, pour le terme intégral ; pour tout $t \geq 0$ la fonction $z \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est continue sur $\Pi(\alpha)$, et de plus pour tout $z \in \Pi(\alpha)$, et $t \geq 0$, on a $|e^{-(z-z_0)t}F(t)| \leq Me^{-(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0))t}$ où M tel que $\sup|F| \leq M$, comme $-(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(z_0)) \leq -(\alpha-\mathrm{Re}(z_0))$, alors on obtient $|e^{-(z-z_0)t}F(t)| \leq Me^{-(\alpha-\mathrm{Re}(z_0))t}$, et donc par le théorème de la convergence dominée, notons aussi que la fonction $t \mapsto Me^{-(\alpha-\mathrm{Re}(z_0))t}$ est intégrable, la fonction $L(f)$ est continue sur $\Pi(\alpha)$, et pour conclure remarquons que $\Pi(\sigma(f)) = \cup_{\alpha>\sigma(f)}\Pi(\alpha)$.

(b) L_f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω_f
Avec les mêmes notations de la question précédente.
Soit α un réel strictement supérieur à $\sigma(f)$, et montrons que L_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le demi plan de $\mathbb{R}^2$ $\Pi(\alpha) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > \alpha\}$, on fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sigma(f) < x_0 < \alpha$, et pose $z_0 = x_0 + \imath y_0$.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$, posons $z = x + \imath y$, et on a $L_f(x,y) = L(f)(z) = (z - z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt$, l'application $(x,y) \mapsto z - z_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Pi(\alpha)$.
Pour tout $t \geq 0$, l'application $(x,y) \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Pi(\alpha)$ et :
$|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{-(z-z_0)t}F(t)\right)| = te^{-(x-x_0)t}|F(t)| \leq Mte^{-(\alpha-x_0)t}$ et
$|\dfrac{\partial}{\partial y}\left(e^{-(z-z_0)t}F(t)\right)| = te^{-(x-x_0)t}|F(t)| \leq Mte^{-(\alpha-x_0)t}$
Puisque $\alpha - x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto te^{-(\alpha-x_0)t} =_{\infty} o(\dfrac{1}{t^2})$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on déduit que L_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Pi(\alpha)$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Pi(\sigma(f))$.
et on a

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t) - (z-z_0)\int_0^{+\infty} te^{-(z-z_0)t}F(t)dt$$

Par une intégration par parties on a ;

$$\begin{aligned}
-(z-z_0) \quad & \int_0^{+\infty} \quad e^{-(z-z_0)t}F(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(e^{-(z-z_0)t}\right)' tF(t)dt \\
&= \left[e^{-(z-z_0)t}tF(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}tF'(t)dt \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}te^{-z_0t}f(t)dt \\
&= -\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)dt - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}te^{-z_0t}f(t)dt
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\partial L_f}{\partial x}(x,y) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-zt}f(t)dt.$

(c) Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, que $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et que $L(f)^{(p)}(x) = (-1)^p \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-xt}f(t).$
D'après le résultat de la question précédente on a $L(f)'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}f(t)dt$ et donc la propriété est vérifiée pour $p = 1$, supposons que $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et $L(f)^{(p)}(x) = (-1)^p \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-xt}f(t)dt$
Par hypothèse, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-xt}f(t)dt$ converge pour tout $x > \sigma(f)$, il en résulte que $\sigma(t \mapsto t^p f(t)) \leq \sigma(f)$, posons g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = t^p f(t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\sigma(g) \leq \sigma(f)$, et remarquons que $L(f)^{(p)}(x) = (-1)^p L(g)(x)$, on a $L(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\sigma(g), +\infty[$ en particulier sur $]\sigma(f), +\infty[$, maintenant appliquons la propriété pour $p = 1$ à g, on obtient,

$L(g)'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt}g(t)dt = -\int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-xt}f(t)dt$, il vient que $L(f)^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et
$L(f)^{(p+1)}(x) = (-1)^{p+1}\int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-xt}f(t)dt.$

(d) La limite

Soit $x_0 \in]\Pi(f), +\infty[$, pour tout $x > x_0$, on a $L(f)(x) = (x - x_0)\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}F(t)dt$, où $F(x) = \int_0^x e^{-x_0t}f(t)dt$, par le changement de variable $u = (x - x_0)t$, on obtient $L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}F(\dfrac{u}{x - x_0})du$ et comme $x \mapsto e^{-u}F(\dfrac{u}{x - x_0})$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, et $\forall u \in \mathbb{R}^+$, $|e^{-u}F(\dfrac{u}{x - x_0})| \leq Me^{-u}$, et comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors
$\lim\limits_{x\to+\infty} L(f)(x) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-u}F(\dfrac{u}{x - x_0})du = 0.$

4. (a) Au voisinage de 0, $\dfrac{1 - \cos t}{t^2} \sim \dfrac{1}{2}$, donc $w(0) = \dfrac{1}{2}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $x = \mathrm{Re}(z) > 0$, et montrons que $L(\omega)(z)$ existe.
Au voisinage de 0, $|e^{-zt}\omega(t)| \sim \dfrac{1}{2}$, et au voisinage de $+\infty$,
$|e^{-zt}\omega(t)| = e^{-xt}\dfrac{1 - cost}{t^2} = o(\dfrac{1}{t^2})$, donc $t \mapsto e^{-zt}\omega(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il en résulte que $L(\omega)(z)$ existe.D'où $\sigma(\omega) \leq 0$.

(b) Pour $x > 0$, on a $L(\omega)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2e^{-xt}\omega(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1 - cost)dt = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1 + x^2}$.

(c) $L(\omega)'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + a$, où $a \in \mathbb{R}$; et
$L(\omega)(x) = x\ln x - x - \frac{1}{2}x\ln(x^2 + 1) + x - \arctan x + ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, ou encore
$L(\omega)(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2 + 1) - \arctan x + \alpha x + \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de $+\infty$;
$x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(x^2 + 1) = \dfrac{1}{2}x(\ln x^2 - \ln(x^2 + 1)) = \dfrac{1}{2}x\ln(1 + \frac{1}{x^2}) \sim \frac{1}{2x}$, donc nécessairement, $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

5. **Un théorème de Cesàro**

(a) La fonction h est continue par morceaux sur $[0, 1]$, donc bornée, notons $k \in \mathbb{R}^+$, tel que $\sup|h| \leq k$, pour $x > 0$ et $t > 0$, on a $|e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})| \leq ke^{-xt}g(t)$, et comme $\sigma(g) \leq 0$, alors la fonction $t \mapsto e^{-xt}g(t)$ est intégrable (g positive), par la suite $t \mapsto e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})$ est intégrable.

(b) Il suffit de traiter le cas $P = X^n$ où $n \in \mathbb{N}$,
$\Delta_x(X^n) = x\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)xt}g(t)dt = \dfrac{1}{n + 1}[(n + 1)x]L(g)([(n + 1)x]) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n + 1}$, et
$\dfrac{1}{n + 1} = \int_0^1 P(t)dt$. On conclut par la linéarité de l'intégral.

(c) Soit f une fonction continue sur le compact $[0, 1]$, d'après le théorème de **Wierstrass**, il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynômes sur $[0, 1]$, qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. On fixe un réel ε strictement positif,

D'abord , il est claire que la fonction $x \mapsto xL(g)(x)$ est bornée dans un voisinage 0,ils existent K un réel strictement positif, et $\eta' > 0$, tel que $x \mapsto xL(g)(x)$ soit soit majorée par K. notons $\varepsilon' = \dfrac{3\varepsilon}{K+2}$
Pour tous $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a ;
$|\Delta_x(f) - \int_0^1 f(t)dt| \leq |\Delta_x(f-P_n)| + |\Delta_x(P_n) - \int_0^1 P_n(t)dt| + |\int_0^1 (P_n(t)-f(t))dt|$
et comme $|\int_0^1 (P_n(t)-f(t))dt| \leq \|P_n - f\|_\infty$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$, tel que $|\int_0^1 (P_n(t)-f(t))dt| \leq \|P_n - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon'}{3}$, d'autre part $\Delta_x(P_N)$ tend vers $\int_0^1 P_N(t)dt$, il existe alors $\eta > 0$ avec $\eta \leq \eta'$, tel que $\forall x \in]0,\eta]$, $|\Delta_x(P_N) - \int_0^1 P_N(t)dt| \leq \dfrac{\varepsilon'}{3}$, pour le terme qui reste , pour tout $x \in]0,\eta]$ on a ; $|\Delta_x(f-P_N)| \leq \|f-P_N\|_\infty x \int_0^\infty e^{-xt}g(t)dt = xL(g)(x)\|f-P_N\|_\infty \leq K\dfrac{\varepsilon'}{3}$, il en résulte que pour tout $x \in]0,\eta]$, $|\Delta_x(f) - \int_0^1 f(t)dt| \leq (K+2)\dfrac{\varepsilon'}{3} \leq \varepsilon$.

(d) Pour $x > 0$, $h_1(e^{-xt}) = 0$ si, et seulement si, $0 \leq e^{-xt} < \dfrac{1}{e}$ si, et seulement si, $t > \dfrac{1}{x}$, d'où l'expression de $h_1(e^{-xt})$; $h_1(e^{-xt}) = 0$ si $t > \dfrac{1}{x}$ et $h_1(e^{-xt}) = e^{xt}$ si $0 \leq t \leq \dfrac{1}{x}$, ainsi ;
$\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-xt}g(t)h_1(e^{-xt})dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)h_1(e^{-xt})dt = \dfrac{\Delta_x(h_1)}{x}$.
h_1 étant continue par morceaux, donc il vérifie la propriété précédente (de la limite) ;donc
$\dfrac{1}{a}\int_0^a f(t)dt = \Delta_{\frac{1}{a}}(h_1)$ tend vers $\int_0^1 h_1(t)dt$ lorsque a tend vers 0, or $\int_0^1 h_1(t)dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \dfrac{1}{t}dt = \ln 1 - \ln\dfrac{1}{e} = 1$, alors $a \mapsto \dfrac{1}{a}\int_0^a f(t)dt$ tend vers 1 lorsque a tend vers 0.

Troisième partie :
Comportement au voisinage de l'origine

1. (a) $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{-0t}f(t)dt$, et par application de 1.2.3 avec $z_0 = 0$, on obtient $L(f)(x) = x - \int_0^{+\infty} e^{-xt}F(t)dt$ et remarquons aussi que $1 = x\int_0^{+\infty} e^{-xt}$, d'où $L(f)(x) - L(f)(0) = x\int_0^{+\infty}(F(t) - L(f)(0))e^{-xt}dt$.

   (b) Soit ε un réel strictement positif, il existe $A > 0$, tel que $\forall t \geq A$, $|F(t) - L(f)(0)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, notons $B = \sup_{t\in[0,A]} |F(t) - L(f)(0)|$, on a alors

$$\begin{aligned}|L(f)(x) - L(f)(0)| &\leq x\int_0^A |F(t) - L(f)(0)|e^{-xt}dt + x\int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}e^{-xt}\\ &\leq B(1-e^{-xA}) + x\int_A^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2}e^{-xt}\\ &\leq (1-e^{-xA})B + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

et comme la fonction $t \mapsto B(1-e^{-xA})$ tend vers 0 quand x tend vers 0, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in [0,\eta]$, $B(1-e^{-xA}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ainsi , pour tout $x \in [0,\eta]$ $|L(f)(x) - L(f)(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(c) Toutes les fonctions f_λ avec $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ et λ non nul.

2. (a) Soit $x > 0$, au voisinage de $+\infty$, on a $t^2e^{-xt}f(t) = \frac{t}{e^{xt}}.tf(t) = o(1)$, donc $e^{-xt}f(t) = o(\frac{1}{t^2})$, ainsi l'intégral, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$ est absolument convergent, donc converge.

(b) Soit ε un réel strictement positif, il $A > 0$, tel que $\forall t \geq A$, $|tf(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pour $a \geq A$, $\frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|dt \leq \frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|dt + \frac{1}{a}\int_A^a |tf(t)|dt \leq \frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|dt + \frac{\varepsilon}{2}$, et comme $a \mapsto \frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|dt$ tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$, il existe $A' \geq A$, tel que $\forall a \geq A'$, $\frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$, il vient alors que pour tout $a \geq A'$, $\frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|dt \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

(c) Considérons la fonction k définie sur $\mathbb{R}$, par $k(u) = u + e^{-u}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $k'(u) = 1 - e^{-u}$, donc k est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit alors que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $k(u) \geq k(0)$, ou encote $\forall u \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-u} \leq u$.

(d) Pour x et a réels strictement positifs, on a
$L(f)(x) - \int_0^a f(t)dt = \int_0^a (e^{-xt} - 1)f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$ (que la relation de **Chasle**), et donc par l'inégalité triangulaire,on obtient le résultat demandé.
D'après le résultat de la question précédente, $1 - e^{-xt} \leq xt$, ce qui donne
$\int_0^a (1-e^{-xt})|f(t)|dt \leq x\int_0^a |tf(t)|dt$, d'autre part, pour tout $t \geq a$, $e^{-xt}|f(t)| \leq \frac{e^{-xt}}{t}|tf(t)| \leq \frac{e^{-xt}}{a}\sup_{s\geq a}|sf(s)|$, par passage à l'intégral, on obtient
$\int_a^{+\infty} e^{-xt}|f(t)| \leq \frac{1}{a}\sup_{t\geq a}|tf(t)| \int_a^{+\infty} e^{-xt}dt + \frac{e^{-ax}}{ax}\sup_{t\geq a}|tf(t)|$, et la majoration $e^{-ax} \leq 1$, permet de conclure.

(e) Pour $x = \frac{1}{a}$, on obtient $|L(f)(\frac{1}{a}) - \int_0^a f(t)dt| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|dt + \sup_{t\geq a}|tf(t)|$ puisque $\lim_{t\to+\infty} |tf(t)| = 0$, alors $\lim_{a\to+\infty}\sup_{t\geq a}|tf(t)| = 0$; *en effet pour* $\varepsilon > 0$, *il existe* $A > 0$, *tel que* $\forall t \geq A$, $|tf(t)| \leq \varepsilon$, *donc* $\forall a \geq A$, $\sup_{t\geq a}|tf(t)| \leq \varepsilon$
Il vient (en tenant compte $a \mapsto \frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|dt$ tend vers 0 en $+\infty$), que $\lim_{a\to+\infty}(L(f)(\frac{1}{p}) -$

$\displaystyle\int_0^a f(t)dt) = 0$, on obtient le résultat, en écrivant ;
$\displaystyle\int_0^a f(t)dt - \mu = \left(\int_0^a f(t)dt - L(f)(\frac{1}{p})\right) + \left(L(f)(\frac{1}{a}) - \mu\right)$

Quatrième partie :
Une généralisation du théorème de Tauber dans le cas réel

1. f_1 continue sur $]0,+\infty[$, par conséquent, les deux fonctions f_2 et f_3 sont continues sur $]0,+\infty[$.
f_1 dérivable en 0, donc f_2 est prolongeable en 0 avec $f_2(0) = f_1'(0) = 0$.
Pour f_3 ; soit $x > 0$, et considérons la fonction h définie sur $[0,x]$, par $h(x) = f_1(t) - t^2A$, où la constante A est tel que $h(x) = 0$, on a $h(0) = 0$ et $h(x) = 0$, h étant dérivable , par le théorème de Rolle, il existe c_x strictement compris entre 0 et x tel que $h'(c_x) = 0$, c'est-à-dire $f_1'(c_x) - 2c_xA = 0$, on obtient $A = \dfrac{f_1'(c_x)}{2c_x}$, et comme $h(x) = 0$, alors $A = \dfrac{f_1(x)}{x^2}$, il vient que $\dfrac{f_1(x)}{x^2} = \dfrac{f_1'(c_x)}{2c_x} = \frac{1}{2}f(c_x)$, maintenant lorsque x tend vers 0 , c_x tend aussi vers 0, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}f(0)$, ainsi f_3 est prolongeable par continuité en 0.
2. Soit $x > 0$, remarquons que $|f_1(x)| \leq xM$, donc $|f_2(x)| \leq M$, par la suite $|f_2(x)e^{-xt}| \leq e^{-xt}$.d'où le résultat.
3. Soit $x > 0$, on a $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Mte^{-xt}$, et comme la fonction $t \mapsto te^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la fonction en question est aussi intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On aussi $|f_3(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$, de même la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la fonction $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
4. Par une intégration par parties ;
$$\begin{aligned}\int_u^v f(t)e^{-xt}dt &= \int_u^v f_1'(t)\frac{e^{-xt}}{t}dt \\ &= \left[f_2(t)e^{-xt}\right]_u^v + x\int_u^v f_2(t)e^{-xt}dt + \int_u^v f_3(t)e^{-xt}dt \\ &= f_2(v)e^{-xv} - f_2(u)e^{-xu} + x\int_u^v f_2(t)e^{-xt}dt + \int_u^v f_3(t)e^{-xt}dt\end{aligned}$$
Comme les deux intégrals $\int_u^v f_2(t)e^{-xt}dt$ et $\int_u^v f_3(t)e^{-xt}dt$ possède des limite quand u tend vers 0 et v tend vers $+\infty$ et les deux termes $f_2(v)e^{-xv}$ et $f_2(u)e^{-xu}$ tendent vers 0, alors l'intégral $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge, ceci étant pour tout $x > 0$, donc $\sigma(f) \leq 0$.
on a $(u \to 0, v \to +\infty)$; $L(f)(x) = xL(f_2) + L(f_3)$
5. (a) D'abord $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} L(f)(x) = 0$, et pour tout $x > 0$, on a $|x^2L(f)''(x)| = x^2|\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}t^2f(t)dt| \leq Mx^2\int_0^{+\infty} te^{-xt}dt$, et par un calcul on trouve $x^2\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}dt = 1$ (*les souvenirs de la fonction* Γ), et donc la fonction $x \mapsto x^2L(f)''(x)$ est bornée, d'après le théorème de **Lettlewood**, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xL(f)'(x) = 0$.

   (b) À l'aide de l'expression de g, on a $xL(g)(x) = 1 + \dfrac{1}{M}xL(f)'(x)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xL(g)(x) = 1$.

(c) Pour $x > 0$, on a $xf_3(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt$,
Puisque $x \mapsto xL(g)(x)$ tend vers 1, lorsque x tend vers 0^+, alors par le théorème **Cesàro**, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)dt = 0$, or $\displaystyle\int_0^x g(t)dt = 1 - \dfrac{1}{xM}\int_0^x tf(t)dt$, il vient alors que $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = xf_3(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

6. D'abord $f_2(x) = xf_3(x)$, donc f_2 tend vers 0 en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et $A > 0$, tel que $\forall t \geq A$, $|f_2(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, et notons aussi $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in [0, \eta]$, $x\displaystyle\int_0^A |f_2(t)|dt \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Pour tout $x \in [0, \eta]$, on a
$|xL(f_2)x| \leq x\displaystyle\int_0^A |f_2(t)|e^{-xt}dt + x\int_A^{+\infty} |f_2(t)|e^{-xt}dt \leq x\int_0^A |f_2(t)|dt + x\frac{\varepsilon}{2}\int_A^{+\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(x\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt) \leq \varepsilon$.

7. $L(f_3)(x) = L(f)(x) - xL(f_2)(x)$, par hypothèse $x \mapsto L(f)(x)$ tend vers 0 en 0^+, et par le résultat de la question précédente $x \mapsto xL(f_2)(x)$ tend vers 0 en 0^+.

8. La fonction f_3 vérifie les condition du théorème de **Tauber**, alors $L(f_3)$ existe et vaut 0.
Pour $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a $\displaystyle\int_\varepsilon^x f(t)dt = \int_\varepsilon^x tf_1'(t)dt = f_2(x) - f_2(\varepsilon) + \int_\varepsilon^x f_3(t)dt$, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)dt$ existe et vaut 0 , les deux termes $f_2(x)$ et $f_2(\varepsilon)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et ε tend vers 0^+, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut 0.

9. Notons φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$, par $\varphi(t) = \phi(t) + \mu e^{-t}$, la fonction $t \mapsto t\phi(t) + te^{-t}$ est bornée sur $[0, +\infty[$, de plus $L(\varphi)(x) = L(\phi)(x) + \mu L(e^{-\cdot}) = \mu - \mu\dfrac{1}{1+x}$,et donc $\lim\limits_{x\to0^+} L(\varphi)(x) = 0$, d'après le théorème de Tauber généralisé, $L(\varphi)(0)$ existe et vaut 0, mais $L(\varphi)(0) = L(\phi) + \mu L(e^{-\cdot})$, d'où $L(\phi) = \mu$.
Notons qu'au passage $L(e^{-\cdot}) = 1$.

و هكذا

النهاية FIN END