Introduction à la notion de série numérique

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, on note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite dont le terme général est donné par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

On se propose ici d'étudier la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ en fonction de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Partie I – Etude de quelques exemples

1. On se propose d'étudier dans un premier temps le cas où $(u_n)_{n\geq 1}$ est la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$ fixé.

1.a Déterminer la nature de $(S_n)_{n\geq 1}$ dans le cas $q = 1$.

1.b On suppose $q \neq 1$.
Exprimer le terme général de $(S_n)_{n\geq 1}$ puis discuter la nature de $(S_n)_{n\geq 1}$ en fonction de q.

2. On s'intéresse ici à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.

2.a Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq x$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

2.b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq \ln(n+1)$.
Que dire de $(S_n)_{n\geq 1}$?

3. On s'intéresse maintenant à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

3.a Etablir que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

3.b En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

3.c Déterminer la nature de $(S_n)_{n\geq 1}$.

4. On s'intéresse désormais à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

4.a Montrer que les suites extraites $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

4.b Quelle est la nature de $(S_n)_{n\geq 1}$?

Partie II – Propriétés générales.

On revient au cadre général : $(u_n)_{n\geq 1}$ suite réelle quelconque et $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge alors $u_n \to 0$.
Observer que la réciproque est fausse en vous appuyant sur l'un des exemples étudiés précédemment.

2. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est formée de réels positifs.
Etudier la monotonie de $(S_n)_{n\geq 1}$.

3. On suppose encore que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs.
On considère de plus une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ on ait $u_n \leq v_n$ et on introduit $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

3.a Former une inégalité permettant de comparer S_n et T_n pour tout entier $n \geq n_0$.

3.b On suppose que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge aussi.

3.c Application :

Montrer que si la suite $(n^2 u_n)_{n\geq 1}$ converge alors $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

4. On revient au cas général : $(u_n)_{n\geq 1}$ suite de réels de signes quelconques.

On suppose que $\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|\right)_{n\geq 1}$ converge et on désire établir que $(S_n)_{n\geq 1}=\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\geq 1}$ converge.

Pour cela on définit deux nouvelles suites de réels positifs $(u_n^+)_{n\geq 1}$ et $(u_n^-)_{n\geq 1}$ par :

$u_n^+=\max(u_n,0)$ et $u_n^-=\max(-u_n,0)$

puis on introduit $(S_n^+)_{n\geq 1}$ et $(S_n^-)_{n\geq 1}$ définies par :

$S_n^+=\sum_{k=1}^{n}u_k^+$ et $S_n^-=\sum_{k=1}^{n}u_k^-$.

4.a Exprimer u_n et $|u_n|$ en fonction de u_n^+ et u_n^- .

4.b Justifier que $(S_n^+)_{n\geq 1}$ et $(S_n^-)_{n\geq 1}$ convergent.

4.c Conclure.

5. Généraliser l'implication du 3.c aux suites réels de signes quelconques.