<u>EXO 4 :</u> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Calculer la limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

Exo 4 :

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-a\big((f(x)-f(a))+f(a)\big)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-a\big(f(x)-f(a)\big)+xf(a)-af(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(-a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{f(a)(x-a)}{(x-a)}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\left(-a\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)}+f(a)\right)$$

$$=-af'(a)+f(a)$$

fin ex4

<u>EXO 2 :</u> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f possède une dérivée symétrique en 0 ssi $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{2h}$ existe et est finie.

1) Si f est dérivable en 0, montrer que f admet une dérivée symétrique en 0 et calculer-la.
2) Si f admet une dérivée symétrique en 0, f est-elle dérivable en 0 ?

Solution

1) Supp que f dérivable en 0.

Alors : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

On a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{2h}+\frac{f(0)-f(-h)}{2h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(h)-f(0)}{h}}_{\to f'(0)}+\underbrace{\frac{f(-h)-f(0)}{(-h)}}_{\to f'(0)}\right)$$

$$=f'(0)$$

D'où f admet une dérivée symétrique en 0, qui vaut $f'(0)$.

2) La réponse est non.
Considérons la fonction valeur absolue $f: x\mapsto |x|$.

$(\forall h,\ |-h|=|h|)\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-|-h|}{2h}=0$

Et f n'est pas dérivable en 0 (classique).

fin ex2

EXO 1 : Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles dérivables ?

1) $x \mapsto x|x|$, 2) $x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$, 3) $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) $f : x \mapsto x|x|$

i) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$; $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$.

ii) Dérivabilité de f en 0

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

D'où f est dérivable en 0.

En conclusion, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

EXO 6 : Calculer la dérivée $n^{ème}$ de : 1) $x \mapsto (\cos x)^3$, 2) $x \mapsto \sin x.e^x$, 3) $x \mapsto (x^2+1)e^x$, 4) $x \mapsto x^2(1+x)^n$.

2) $(\sin x . e^x)^{(n)} = ?$

Méthode 1 : (Formule de Leibniz)

$$(\sin x . e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin x)^{(k)} \underbrace{(e^x)^{(n-k)}}_{\text{constante}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) . e^x$$

$$= e^x . \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= e^x . \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)}\right)$$

$$= e^x \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k . e^{ix}\right)$$

$$= e^x \mathrm{Im}\left(e^{ix} . \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k\right)$$

$$= e^x \mathrm{Im}\left(e^{ix} . \left(e^{i\frac{\pi}{2}}+1\right)^n\right)$$

$$= e^x \mathrm{Im}\left(e^{ix} . (i+1)^n\right)$$

$$= e^x \mathrm{Im}\left(e^{ix} . \sqrt{2}^n . e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) \qquad i+1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= e^x \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}^n e^{i\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}\right)$$

$$\left(\sin x \cdot e^{x}\right)^{(n)} = e^{x}\sqrt{2}^{\,n}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

Méthode 2 (via les fonctions complexes)

$$\sin x \cdot e^{x} = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\cdot e^{x}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$$

$$\left(\sin x \cdot e^{x}\right)^{(n)} = \mathrm{Im}\left(\left(e^{(1+i)x}\right)^{(n)}\right)$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^{n} e^{\lambda x}$$

Rappel

$$= \mathrm{Im}\left((1+i)^{n} e^{(1+i)x}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{n} e^{x} e^{ix}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}^{\,n} e^{x} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{ix}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}^{\,n} e^{x} e^{i\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}\right)$$

$$= \sqrt{2}^{\,n} e^{x} \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$$

1) $(\cos^3 x)^{(n)} = ?$

On commence par la linéarisation de $\cos^3 x$.

On a alors :

$$(\cos^3 x)^{(n)} = \left(\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(3x)\right)^{(n)} + \frac{3}{4}\left(\cos x\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 3^n \cdot \cos^{(n)}(3x) + \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 3^n \cdot \cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

<u>EXO 17 :</u> A l'aide du TAF calculer la limite $\lim_{x\to+\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}})$.

Soit $x>0$.

$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}} = f(x+1) - f(x)$; où $f(t) = t e^{\frac{1}{t}}$

Pensons au TAF appliqué à f sur $[x, x+1]$.

On a $\left(\begin{array}{l} f \text{ Continue sur } [x, x+1] \\ f \text{ dérivable sur }]x, x+1[\end{array} \right)$

D'où : $\exists\, x < C_x < x+1,\ f(x+1) - f(x) = ((x+1) - x) f'(C_x)$

Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1) - f(x)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} f'(C_x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{C_x}\right)e^{\frac{1}{C_x}}$$

Et on a $\lim_{x\to+\infty} C_x = +\infty$ car $\left\{ \begin{array}{l} \forall x>0,\ x < C_x \\ \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array} \right.$

D'où enfin

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$

EXO 8 : *Soit* $n \in \mathbb{N}$:

1) Ecrire la dérivée $n^{ème}$ de la fonction x^{2n}.
2) Calculer la dérivée $n^{ème}$ de la fonction x^{2n} via Leibniz en écrivant $x^{2n} = (x^n . x^n)$.
3) En déduire que $\sum_{k\ 0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

Rappel

Si $0 \leq k \leq n$, on a $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

1) $(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!} x^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!} x^n$

2) $(x^{2n})^{(n)} = (x^n . x^n)^{(n)}$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(k)} (x^n)^{(n-k)}$ (Leibniz)

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k . \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} . \frac{n!}{k!} x^k$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k . C_n^k \, n! \, x^n$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \right) . n! \, x^n$

3) De 1) et 2) on tire :

$$\frac{(2n)!}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 \right) . n!$$

D'où $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n$

Fin Ex8

La suite viendra