Deux équations fonctionnelles

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1.a Calculer $f(0)$ et établir que f est une fonction impaire.

1.b Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(nx)=nf(x)$. Etendre cette relation à $n\in\mathbb{Z}$.

1.c On pose $a=f(1)$. Montrer que pour tout $u\in\mathbb{Q}$, $f(u)=au$.

1.d En exploitant la continuité de f, établir enfin que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

2. Soit $g:\mathbb{R}\to\left]-1,1\right[$ une application continue telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

2.a Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.

Montrer que φ est réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\left]-1,1\right[$ et que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(x+y)=\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1+\varphi(x)\varphi(y)}.$$

2.b On pose $h=\varphi^{-1}\circ g$. Exprimer $h(x+y)$ en fonction de $h(x)$ et $h(y)$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$.

2.c En déduire la forme de l'expression de $g(x)$ en fonction de x.