Etude d'une fonction intégrale

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $t+\arctan t=0$.
2. On pose $f(x)=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t+\arctan t}$.

   2.a Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

   2.b Etudier la parité de f.

   2.c Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $f'(x)$ pour $x>0$.

   2.d Donner le sens de variation de f.
3. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

   3.a Déterminer une constante C telle que pour tout $x>0$,

   $$\left|f(x)-\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|\leq C.\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

   3.b En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur.
4. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+.

   4.a Montrer qu'il existe deux réels a,b tels que $\frac{1}{t+\arctan t}=\frac{a}{t}+bt+o(t)$ au voisinage de 0^+.

   4.b Soit g une fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to 0+}g(t)=0$.

   Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0+}\sup\limits_{t\in[x,2x]}|g(t)|=0$.

   4.c En déduire que si h est une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x)=o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\int_x^{2x}h(t)\mathrm{d}t=o(x^2)$ au voisinage de 0^+.

   4.d Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera.

   4.e Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
   Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

   4.f Etudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0.

   4.g Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0.

   4.h En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.