

I. Une fonction définie par une intégrale

Soit λ un réel vérifiant $2\lambda > -1$

1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. la fonction $\varphi_x : \theta \mapsto e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta$ est continue sur $]0, \pi[$.

Si $\lambda \geq 0$ alors φ_x se prolonge par continuité sur $[0, \pi[$. Elle est donc intégrable sur $]0, \pi[$

Si $\lambda < 0$ et comme pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$, $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ alors

$$\forall \theta \in]0, \pi[, |e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta| = |\sin^{2\lambda} \theta| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\lambda} \frac{1}{\theta^{-2\lambda}} \quad \text{avec } -2\lambda < 1$$

Donc φ_x est intégrable sur $]0, \pi/2[$. Elle est aussi intégrable pour les mêmes raisons sur $[\pi/2, \pi[$ car pour tout $\theta \in [\pi/2, \pi[$,

$$\varphi(\theta) = e^{-ix \cos(\theta)} \sin^{2\lambda}(\pi - \theta) = O_{\pi} \left(\frac{1}{(\pi - \theta)^{-2\lambda}} \right)$$

Ainsi

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $\varphi_x : \theta \mapsto e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta$ est intégrable sur $]0, \pi[$.

On pose dans la suite

$$f_{\lambda}(x) = \int_0^{\pi} e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta \, d\theta$$

Noter que

en fait au voisinage de 0^+ et quelque soit le signe de λ , $\sin^{2\lambda} \theta = O(\theta^{2\lambda})$ car on peut écrire $|\sin^{2\lambda} \theta| \leq M|\theta|^{2\lambda}$ avec $M = 1$ si $\lambda \geq 0$ et $M = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\lambda}$ si $\lambda < 0$.

1.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\theta \mapsto \pi - \theta$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]\pi/2, \pi[$ sur $]0, \pi/2[$, on peut donc l'utiliser comme changement de variable:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta d\theta = - \int_{\pi/2}^0 e^{-i \cos(\pi-\theta)} \sin^{2\lambda}(\pi-\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta d\theta$$

Par suite

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(x) &= \int_0^{\pi/2} e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{ix \cos \theta} \sin^{2\lambda} \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\lambda}(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta \quad (1)$$

1.3. On considère la fonction $g : (x, \theta) \mapsto \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta$, $(x, \theta) \in D = \mathbb{R} \times]0, \pi[$. g est de classe \mathcal{C}^{∞} sur D et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $(x, \theta) \in D$

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, \theta) = \cos^k \theta \cos\left(x \cos \theta + k \frac{\pi}{2}\right) \sin^{2\lambda} \theta$$

et donc pour tout (x, θ)

$$\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, \theta) \right| \leq (\sin \theta)^{2\lambda}$$

D'après le développement de la question précédente, la fonction $\theta \mapsto \sin^{2\lambda} \theta$ est intégrable sur $]0, \pi[$. Alors d'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, la fonction f_{λ} est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} , et selon la formule de LEIBNIZ

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{\lambda}^{(k)}(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^k \theta \cos\left(x \cos \theta + k \frac{\pi}{2}\right) \sin^{2\lambda} \theta d\theta$$

f_{λ} est de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R} et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{\lambda}^{(k)}(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^k \theta \cos\left(x \cos \theta + k \frac{\pi}{2}\right) \sin^{2\lambda} \theta d\theta \quad (2)$$

1.4. Une équation différentielle

Théorème du cours

de changement de variables pour les intégrales sur intervalle quelconque:

Soit $\varphi : I \rightarrow J$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\int_J f$ est convergente ssi $\int_I |\varphi'| f \circ \varphi$ est convergente et dans ce cas

$$\int_J f = \int_I |\varphi'| f \circ \varphi$$

Sous une forme plus pratique, dans le cas où par exemple $J =]\alpha, \beta[$:

Si $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que φ' ne s'annule pas sur J ,

alors $\int_{\liminf \varphi}^{\limsup \varphi} f(x) dx$ est convergente ssi

$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$ est convergente et dans ce cas

$$\int_{\liminf \varphi}^{\limsup \varphi} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$$

Théorème du cours

Formule de LEIBNIZ pour dérivation à tout ordre sous le signe intégrale:

K et I étant des intervalles de \mathbb{R} , soit $f : K \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction telle que

- f est continue sur $K \times I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k f}{dx^k}$ existe et elle est continue sur $I \times K$;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, \left| \frac{d^k f}{dx^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t)$$

Alors la fonction

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^{∞} sur K et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in K$,

$$g^{(k)}(x) = \int_I \frac{d^k f}{dx^k}(x, t) dt$$

1.4.1 D'après la relation (2 - p. à gauche), pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f''_{\lambda}(x) = -2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda}(\theta) d\theta$$

Alors, moyennant le fait que les deux fonctions $\theta \mapsto \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta$ et $\theta \mapsto \sin^2(\theta) \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta$ sont intégrables sur $[0, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} f''_{\lambda}(x) &= -2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta \\ &= -2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin^{2(\lambda+1)} \theta d\theta \\ &= -f_{\lambda}(x) + f_{\lambda+1}(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''_{\lambda}(x) = f_{\lambda+1}(x) - f_{\lambda}(x) \quad (3)$$

Théorème du cours

Formule d'intégration par parties pour intégrales sur intervalle quelconque:

Soient $f, g:]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions de classes \mathcal{C}^1 ($\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $\alpha < \beta$). Si l'une des conditions suivantes se réalise: (i) Les intégrales $\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)g(t)dt$ et $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt$ sont convergentes; (ii) l'une des deux intégrales précédentes est convergente et la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$ admet des limites finies en α et en β . Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)g(t)dt = \left[f(t)g(t) \right]_{t=\alpha}^{t=\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt$$

sachant que les quantités en intervention dans la formule ont toutes un sens

1.4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après (2 - p. à gauche), $f'_{\lambda}(x) = - \int_0^{+\infty} \cos \theta \sin(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta$.

Ensuite parce qu'on peut écrire

$$x \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda+2} \theta = - \frac{d}{d\theta} \left(\sin(x \cos \theta) \right) \sin^{2\lambda+1} \theta$$

que la fonction $\theta \mapsto x \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda+2} \theta$ est intégrable sur $[0, \pi/2[$, et que la fonction $\theta \mapsto \sin(x \cos \theta) \sin^{2\lambda+1} \theta$ admet des limites finies en 0 et en $\pi/2$ (lesquelles sont nulles); alors la formule de l'intégration par parties s'applique. Elle permet de faire:

$$\begin{aligned} x f_{\lambda+1}(x) &= x \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda+2} \theta d\theta \\ &= - \left[\sin(x \cos \theta) \sin^{2\lambda+1} \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + (2\lambda+1) \int_0^{\pi/2} \sin(x \cos \theta) \cos \theta \sin^{2\lambda} \theta d\theta \\ &= -(2\lambda+1) f'_{\lambda}(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (2\lambda+1) f'_{\lambda}(x) = -x f_{\lambda+1}(x) \quad (4)$$

1.4.3 D'après les relations (4) et (3)

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f''_{\lambda}(x) + (2\lambda+1) f'_{\lambda}(x) + x f_{\lambda}(x) = 0 \quad (5)$$

ce qui signifie que f_λ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$xy'' + (2\lambda + 1)y' + xy = 0 \quad (6)$$

II. Une formule d'EULER

On rappelle que la fonction Gamma d'Euler est définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2.1. Soit p un réel strictement positif.

2.1.1 Les intégrales $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$ sont convergentes. Une intégration par parties donne, sachant que $\lim_{t \rightarrow 0} t^p e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^p e^{-t} = 0$

$$\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$$

soit $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

2.1.2 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Un raisonnement par récurrence utilisant la relation de la question précédente démontre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

2.1.3 La fonction $t \mapsto t^{p-1} e^{-t}$ est continue strictement positive sur $]0, +\infty[$, et puisqu'elle est intégrable sur $]0, +\infty[$ alors $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt > 0$. Soit $\Gamma(p) > 0$.

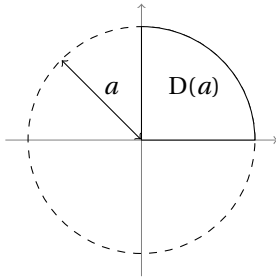
$$\forall p > 0, \Gamma(p) > 0$$

2.1.4 la fonction $s \mapsto s^2$ induit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même. Le changement de variables $t = s^2$ donne alors

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} s^{2p-1} e^{-s^2} ds$$

Noter que

C'est ici un résultat de cours (comme certaines des questions qui suivent); mais la question demande explicitement de le démontrer. Il faut donc le faire.



$$\forall p > 0, \Gamma(p) = 2 \int_0^{+\infty} s^{2p-1} e^{-s^2} ds$$

2.2.

Soient p et q deux réels tels que $2p-1 \geq 0$ et $2q-1 \geq 0$. Pour tout réel $a > 0$, on pose

$$I_p(a) = \int_0^a t^{2p-1} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad D(a) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$$

2.2.1 Soit $a > 0$. La fonction $h : (x, y) \mapsto x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2}$ est continue sur $[0, a]^2$ donc d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \iint_{[0, a]^2} h(x, y) dx dy &= \int_0^a x^{2p-1} e^{-x^2} \left(\int_0^a y^{2q-1} e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int_0^a y^{2q-1} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_0^a x^{2p-1} e^{-x^2} dx \right) \end{aligned}$$

ou encore

$$\forall a > 0, \iint_{[0, a]^2} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy = I_p(a) I_q(a)$$

2.2.2 On considère le changement de variable $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, de telle sorte que

$$(x, y) \in D(a) \iff (r, \theta) \in [0, a] \times [0, \pi/2]$$

Sachant que le jacobien de ce changement de variable est $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r$, alors

$$\iint_{D(a)} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{[0, a] \times [0, \pi/2]} r^{2p+2q-2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) e^{-r^2} r dr d\theta$$

Et ensuite via la formule de Fubini

$$\iint_{D(a)} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_0^a r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta \right)$$

soit

$$\iint_{D(a)} x^{2p-1} y^{2q-1} e^{-x^2-y^2} dx dy = I_{p+q}(a) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta$$

2.2.3 Pour tout $a > 0$,

$$D(a) \subset [0, a]^2 \subset D(a\sqrt{2})$$

car si $(x, y) \in D(a)$ alors $x^2 + y^2 \leq a^2$ avec $x, y \geq 0$ et donc $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq a$, ie $(x, y) \in [0, a]^2$. Et si $(x, y) \in [0, a]^2$ alors $x, y \geq 0$ et $x^2 + y^2 \leq 2a^2$, soit $(x, y) \in D(a\sqrt{2})$.

Maintenant la fonction $h : (x, y) \mapsto x^{2q-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}$ est partout positive sur $]0, +\infty[^2$ donc

$$\iint_{D(a)} h(x, y) dx dy \leq \iint_{[0, a]^2} h(x, y) dx dy \leq \iint_{D(a\sqrt{2})} h(x, y) dx dy$$

ce qui donne

$$I_{p+q}(a) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \leq I_p(a)I_q(a) \leq I_{p+q}(a\sqrt{2}) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \quad (7)$$

Mais comme pour tout $p > 0$ et par convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2p-1} e^{-t} dt$, on a

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I_p(a) = \int_0^{+\infty} t^{2p-1} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma(p)$$

alors d'après le théorème d'encadrement, en faisant tendre a vers $+\infty$ dans les inégalités (7) on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta$$

$$\forall (p, q) \in]0, +\infty[^2, \Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta \quad (8)$$

2.3. D'après la formule d'EULER (8), avec $p = q = 1/2$ on a $\Gamma(1/2)^2 = 2\Gamma(1) \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$. et comme Γ est partout strictement positive alors $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Ensuite un raisonnement par récurrence utilisant la relation $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ valable pour tout $p > 0$ démontre que

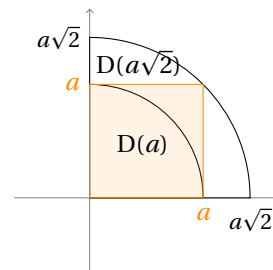
$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$$

III. Fonctions de BESSEL

Pour tout $\lambda > -1/2$, on note J_λ , la fonction de BESSEL d'ordre λ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x)$$

J_λ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.



Dans toute la suite on suppose que $\lambda > -\frac{1}{2}$

3.1. Pour tout $x > 0$, d'après l'expression de f_λ donnée dans (1 - p.36)

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2 \left[\frac{\sin(x \cos \theta)}{-x} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 2 \frac{\sin x}{x}$$

Ensuite,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} f_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$\forall x > 0, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

et de ce fait

$$J_{\frac{1}{2}}(x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \quad (9)$$

3.2. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} J'_\lambda(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{\lambda}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda-1} f_\lambda(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f'_\lambda(x) \right) \\ &= \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \cdot \frac{x}{2\lambda+1} f_{\lambda+1}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} f_{\lambda+1}(x) \\ &= \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + 1 + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+1} f_{\lambda+1}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

$$= \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - J_{\lambda+1}(x)$$

à l'étape (10) on a utilisé la relation $(2\lambda+1)f'_\lambda(x) = -x f_{\lambda+1}(x)$ démontrée précédemment, et à l'étape (11) on a remplacé $\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2})$ par $\Gamma(\lambda + 1 + \frac{1}{2})$. On a ainsi

$$\forall x > 0, J_{\lambda+1}(x) = \frac{\lambda}{x} J_\lambda(x) - J'_\lambda(x) \quad (12)$$

On pose

$$H = \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$$

Les fonctions en jeu ici sont de classe \mathcal{C}^∞ , on peut donc considérer que H est l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ qui à une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ associe la fonction de classe \mathcal{C}^∞

$$H(f) : x \mapsto \frac{1}{x} f'(x)$$

Notons D l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ qui à tout $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ associe sa fonction dérivée f' et P l'endomorphisme du même espace qui à un élément f associe la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} f(x)$. On constate dès lors que $H = P \circ D$ et que P est un endomorphisme inversible. P^{-1} étant l'endomorphisme qui à tout $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ associe

$$P^{-1}(f) : x \mapsto x f(x)$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire: $D \circ H^{n-1} = P^{-1} \circ (P \circ D) \circ H^{n-1} = P^{-1} \circ H^n$. ce qui signifie que pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$[H^{n-1}(f)]'(x) = x H^n(f)(x) \tag{13}$$

Considérons maintenant la fonction f de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ définie par

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in]0, +\infty[, J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} H^n(f)(x)$$

Pour $n = 0$ on a bien d'après (9 - p. précédente) $J_{\frac{1}{2}}(x) = (-1)^0 x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} H^0(f)(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la formule soit vraie à l'ordre n . Soit $x > 0$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et la relation (13) on a

$$\begin{aligned} J'_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x^{n-\frac{1}{2}} H^n(f)(x) + x^{n+\frac{1}{2}} \left(H^n(f) \right)'(x) \right) \\ &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} H^n(f)(x) + x H^{n+1}(f)(x) \right) \\ &= \frac{n+\frac{1}{2}}{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x) + (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1+\frac{1}{2}} H^{n+1}(f)(x) \end{aligned}$$

Or d'après la relation (12 - p.41) (qu'on applique à $\lambda = n + \frac{1}{2}$)

$$J_{n+1+\frac{1}{2}}(x) = \frac{n+\frac{1}{2}}{x} J_{n+\frac{1}{2}} - J'_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Par suite, $J_{n+1+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+1+\frac{1}{2}} H^{n+1}(f)(x)$.

Ce qui achève la démonstration. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad (14)$$

3.4. On pose $\gamma(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})2^\lambda}$. En reprenant la définition de J_λ et en la dérivant deux fois

$$\begin{aligned} J_\lambda(x) &= \gamma(\lambda) x^\lambda f_\lambda(x) \\ J'_\lambda(x) &= \gamma(\lambda) \left(\lambda x^{\lambda-1} f_\lambda(x) + x^\lambda f'_\lambda(x) \right) \\ J''_\lambda(x) &= \gamma(\lambda) \left(\lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} f_\lambda(x) + 2\lambda x^{\lambda-1} f'_\lambda(x) + x^\lambda f''_\lambda(x) \right) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} x^2 J''_\lambda(x) + x J'_\lambda(x) + (x^2 - \lambda^2) J_\lambda(x) &= \gamma(\lambda) \left[((x^2 - \lambda^2) x^\lambda + \lambda x^\lambda + \lambda(\lambda-1) x^\lambda) f_\lambda(x) + \right. \\ &\quad \left. (x^{\lambda+1} + 2\lambda x^{\lambda+1}) f'_\lambda(x) + x^{\lambda+2} f''_\lambda(x) \right] \\ &= \gamma(\lambda) x^{\lambda+1} \left[x f_\lambda(x) + (2\lambda+1) f'_\lambda(x) + x f''_\lambda(x) \right] \end{aligned}$$

Mais selon (5 - p.37), $x f''_\lambda(x) + (2\lambda+1) f'_\lambda(x) + x f_\lambda(x) = 0$. Donc

$$x^2 J''_\lambda(x) + x J'_\lambda(x) + (x^2 - \lambda^2) J_\lambda(x) = 0$$

J_λ est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \lambda^2) y = 0 \quad (15)$$

3.5. La fonction cos est développable en série entière sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

Donc avec $t = x \cos \theta$ où $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0, \pi/2]$

$$\cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \cos^{2n} \theta \sin^{2\lambda} \theta$$

Fixons $x > 0$ et considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$u_n : \theta \longmapsto \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \cos^{2n} \theta \sin^{2\lambda} \theta, \theta \in]0, \pi/2]$$

On a alors :

- Les fonctions u_n sont continues sur $]0, \pi/2]$, chacune est intégrable sur $]0, \pi/2]$ car au voisinage de 0 et quelque soit le signe de λ

$$u_n(\theta) = O\left(\frac{1}{\theta^{-2\lambda}}\right) \text{ avec } -2\lambda < 1$$

- la série de fonctions $\sum u_n$ **cvS** sur $]0, \pi/2]$ et sa somme, la fonction $U : \theta \longmapsto \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta$ est continue sur $]0, \pi/2]$;
- et finalement

$$\int_0^{\pi/2} |u_n(\theta)| d\theta \leq M \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta^{-2\lambda}} \leq K \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (16)$$

$$\text{où } M = 1 \text{ si } \lambda \geq 0 \text{ et } M = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2\lambda} \text{ sinon et } K = M \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\theta^{-2\lambda}}$$

Comme la série $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (DSE de la fonction cosh) alors la série $\sum \int_0^{\pi/2} |u_n(\theta)| d\theta$ converge.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sur intervalle quelconque d'une série de fonctions sont vérifiées, ce qui permet d'affirmer que

$$f_\lambda(x) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) \sin^{2\lambda} \theta d\theta = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \sin^{2\lambda} \theta d\theta$$

Or d'après la Formule d'EULER (8 - p.40) appliquée à $p = n + \frac{1}{2}$ et $q = \lambda + \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \sin^{2\lambda} \theta d\theta = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{2\Gamma(\lambda + n + 1)}$$

et vu l'expression de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ on a donc $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \sin^{2\lambda} \theta d\theta = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{2\Gamma(\lambda + n + 1)} \cdot \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$.

Ainsi

$$f_\lambda(x) = \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \Gamma(\lambda + n + 1)} x^{2n} \quad (17)$$

Cas particulier

Si $\lambda \geq 0$ alors les fonctions u_n sont prolongeables par continuité sur le segment $[0, \pi/2]$ et la série de fonctions $\sum u_n$ **cvN** sur $[0, \pi/2]$. Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment d'une série de fonctions est donc applicable dans ce cas.

Théorème du cours

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment J , qui **cvu** sur J ; alors la série $\sum \int_J f_n$ est convergente et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_J f_n = \int_J \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right)$$

Alors

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \Gamma(\lambda + n + 1)} x^{2n}$$

$$\forall x > 0, J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\lambda + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad (18)$$

3.6. f_λ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Elle est continue en 0 et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_\lambda(x) = f_\lambda(0) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2\lambda} \theta d\theta$$

ou d'une autre manière, en utilisant le développement (17 - p. à gauche) de f_λ ,

$$f_\lambda(0) = \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1)}$$

Les deux expressions de $f_\lambda(0)$ se rejoignent en utilisant la formule d'EULER.

Ensuite, sachant que pour tout $x > 0$, $J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda f_\lambda(x)$. Alors

$$J_\lambda(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{(x/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}$$

3.7. Une autre expression intégrale de J_n , $n \in \mathbb{N}$

3.7.1 Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Sachant que pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ip\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^{n+2m} e^{-in\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n+2m} (-1)^k \binom{n+2m}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+2m-k)\theta} e^{-ik\theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n+2m} (-1)^k \binom{n+2m}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2i(m-k)\theta} d\theta \\ &= (-1)^m \binom{n+2m}{m} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^{n+2m} e^{-in\theta} d\theta = (-1)^m \binom{n+2m}{m} \quad (19)$$

Par définition

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

3.7.2 Soit $x > 0$. En utilisant la définition de l'exponentielle d'un nombre complexe, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e^{ix \sin \alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (ix \sin \alpha)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \right)^k$$

soit

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{ix \sin \alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})^k$$

Ensuite, selon ce résultat, pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$e^{ix \sin \theta - in\theta} = e^{-in\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(\theta)$$

avec $v_k(\theta) = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta}$. Les fonctions v_k sont continues sur le segment $[-\pi, \pi]$ et pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$|v_k(\theta)| \leq \frac{x^k}{k!}$$

donc la série de fonctions $\sum v_k$ **CVN** sur $[-\pi, \pi]$. Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment permet alors de faire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-p)\theta} e^{-ip\theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{k}{p} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-2p-n)\theta} d\theta \end{aligned}$$

de quoi on déduit que

- s'il existe $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$ tel que $k = n + 2p$ alors selon (19 - p. à gauche)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta = (-1)^p \binom{n+2p}{p} \cdot 2\pi$$

- si aucun $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ne vérifie $k = n + 2p$ alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta = 0$$

Le développement (20 - p. à gauche) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^{n+2p} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(n+2p)!} \binom{n+2p}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \end{aligned}$$

ce dernier terme est exactement le développement de $J_n(x)$ vu dans (18 - p.45).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \theta - in\theta} d\theta \quad (21)$$

3.7.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x > 0$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta \right)$$

mais comme la fonction $\theta \mapsto \sin(x \sin \theta - n\theta)$ est impaire alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 0$$

et grâce à la parité de la fonction $\theta \mapsto \cos(x \sin \theta - n\theta)$ on a finalement

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (22)$$

IV. Application à l'étude de l'équation de KEPLER

4.1.

Pour tout $\varepsilon \in]-1, 1[$ on note φ_ε la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_\varepsilon(x) = x - \varepsilon \sin x$$

4.1.1 Soit $\varepsilon \in]-1, 1[$. La fonction φ_ε est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'_\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon \cos x$$

comme $-1 < \varepsilon < 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'_\varepsilon(x) > 0$. φ_ε est donc strictement croissante. D'après le théorème des valeurs intermédiaires $\varphi_\varepsilon(\mathbb{R})$ est un intervalle de \mathbb{R} . C'est ici plus précisément $] \lim_{-\infty} \varphi_\varepsilon, \lim_{+\infty} \varphi_\varepsilon [=] -\infty, \infty [$.

Alors

φ_ε est une \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

4.1.2 Tout élément t de \mathbb{R} admet un unique antécédent par la bijection φ_ε dans \mathbb{R} qu'on va noter $x_{t,\varepsilon}$ (vu qu'il dépend de t et de ε). $x_{t,\varepsilon}$ est l'unique élément de \mathbb{R} tel que

$$\varphi_\varepsilon(x_{t,\varepsilon}) = x_{t,\varepsilon} - \varepsilon \sin(x_{t,\varepsilon}) = t$$

Ce qui permet de définir l'application $\nu : (t, \varepsilon) \mapsto x_{t,\varepsilon}$. Ainsi

ν est l'unique application de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ dans \mathbb{R} telle que

$$\forall (t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[, \nu(t, \varepsilon) = t + \varepsilon \sin(\nu(t, \varepsilon))$$

4.2. Premières propriétés de la fonction ν : Soit $\varepsilon \in]-1, 1[$.

4.2.1 On a $\varphi_\varepsilon(0) = 0$ et $\varphi_\varepsilon(\pi) = \pi$ ce qui signifie par définition de ν que

$$\nu(0, \varepsilon) = 0 \text{ et } \nu(\pi, \varepsilon) = \pi \quad (24)$$

Théorème du cours

Une fonction $f : I \rightarrow J$, où I et J sont des intervalles non triviaux de \mathbb{R} , est un \mathcal{C}^p -difféomorphisme ($p \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si

$$\begin{cases} f(I) = J \\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall t \in I, f'(t) \neq 0 \end{cases}$$

Noter que: l'injectivité de f est une conséquence du fait que sa dérivée ne s'annule pas sur I et de ce fait, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, garde un signe constant sur I (f est donc strictement monotone sur I).

Précision

On a pour tout $(t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \times]-1, 1[$
 $x = t + \varepsilon \sin x \iff x = \nu(t, \varepsilon) \quad (23)$

Précision

Si on fixe $\varepsilon \in]-1, 1[$ alors $\psi_\varepsilon : t \mapsto \nu(t, \varepsilon)$ est la bijection réciproque de φ_ε ($\varphi_\varepsilon^{-1} = \psi_\varepsilon$)

4.2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $v(-t, \varepsilon) = -t + \varepsilon \sin(v(-t, \varepsilon))$ qu'on peut réécrire sous la forme: $-v(-t, \varepsilon) = t + \varepsilon \sin(-v(-t, \varepsilon))$. Ce qui implique, par unicité de $v(t, \varepsilon)$, que $v(t, \varepsilon) = -v(-t, \varepsilon)$.

La fonction $(t \mapsto v(t, \varepsilon), t \in \mathbb{R})$ est impaire

4.2.3 Soit $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $v(t + 2\pi, \varepsilon) = t + 2\pi + \varepsilon \sin(v(t + 2\pi, \varepsilon))$ qu'on peut écrire sous la forme: $v(t + 2\pi, \varepsilon) - 2\pi = t + \varepsilon \sin(v(t + 2\pi, \varepsilon) - 2\pi)$, implique que $v(t, \varepsilon) = v(t + 2\pi, \varepsilon) - 2\pi$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(t + 2\pi, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + 2\pi$$

Ensuite, l'égalité précédente implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v(t + 2\pi, \varepsilon) - (t + 2\pi) = v(t, \varepsilon) - t$ et cela signifie que

La fonction $(t \mapsto v(t, \varepsilon) - t, t \in \mathbb{R})$ est 2π -périodique

4.3. Régularité de la fonction v

On note $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times]-1, 1[\times \mathbb{R}$, et on désigne par g la fonction définie sur \mathcal{U} par

$$\forall (t, \varepsilon, x) \in \mathcal{U}, g(t, \varepsilon, x) = x - \varepsilon \sin x - t$$

4.3.1 g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{U} comme somme de produits de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Pour tout $(t, \varepsilon, x) \in \mathcal{U}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, \varepsilon, x) = 1 - \varepsilon \cos(x)$$

et là on constate que pour tout $(t, \varepsilon, x) \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t, \varepsilon, x) > 0$.

La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{U} et

$$\forall (t, \varepsilon, x), \frac{\partial g}{\partial x}(t, \varepsilon, x) > 0$$

4.3.2 Soit $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$. Posons $x = v(t, \varepsilon)$ de telle sorte que $g(t, \varepsilon, x) = 0$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ et $\frac{\partial g}{\partial x}(t, \varepsilon, x) \neq 0$ donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe des ouverts V de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ et I de \mathbb{R} , voisinages respectifs de (t, ε) et de x et une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , $w : V \rightarrow I$ tels que

$$\forall (s, \delta, y) \in V \times I, g(s, \delta, y) = 0 \iff y = w(s, \delta)$$

Mais puisque

$$g(s, \delta, y) = 0 \iff y = s + \delta \sin y \iff y = v(s, \delta)$$

alors v coïncide avec w sur l'ouvert V . La restriction de v à V est donc de classe \mathcal{C}^∞ . Ainsi pour tout $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$, il existe un voisinage V de (t, ε) sur lequel v est de classe \mathcal{C}^∞ . Alors

v est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times]-1, 1[$.

4.4. Expression de v à l'aide d'une série entière de la variable ε

4.4.1 Pour tout $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[$ $v(t, \varepsilon) = t + \varepsilon \sin(v(t, \varepsilon))$. ce qui donne en dérivant partiellement par rapport à t et à ε

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon) \cos(v(t, \varepsilon)) \\ \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) = \sin(v(t, \varepsilon)) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \cos(v(t, \varepsilon)) \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon)$, la deuxième par $\frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon)$ et en faisant la différence des deux équations ainsi obtenues, on déduit que

$$0 = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) - \sin(v(t, \varepsilon)) \frac{\partial v}{\partial t}(t, \varepsilon)$$

$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial t} \sin v$

4.4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\sin^n v$ est de classe \mathcal{C}^∞ comme composée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon \partial t} \sin^n v + n \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \cos v \sin^{n-1} v$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \cdot \sin^n v \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \varepsilon} \sin^n v + n \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} \cos v \sin^{n-1} v$$

Mais, v étant de classe \mathcal{C}^∞ , le théorème de Schwarz donne $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon \partial t}$. Donc

$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \cdot \sin^n v \right)$ (25)

4.4.3 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$ on a bien $\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin v$.

Précision

L'existence de v a été démontré de manière globale sur son domaine de définition $\mathbb{R} \times]-1, 1[$. Le fait qu'elle soit de classe \mathcal{C}^∞ est justifié de manière locale grâce au *théorème des fonctions implicites*. C'est l'une des utilisations courante de ce dernier théorème.

v est de classe \mathcal{C}^∞ donc ces dérivées partielles existent.

Corrigé
à la formulation erronée d'un raisonnement par récurrence qui consiste à dire supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, \dots \mathcal{P}(n) \dots$ dans ce cas il n'y a plus rien à démontrer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right)$. Alors

$$\frac{\partial^{n+1} v}{\partial \varepsilon^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right) \right)$$

Mais justement d'après le théorème de SCHWARZ généralisé, lorsqu'on applique les dérivées partielles suivantes à des fonctions de classes \mathcal{C}^n , on a:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} v}{\partial \varepsilon^{n+1}} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right) \right) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \varepsilon} \cdot \sin^n v \right) \right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^{n+1} v \right) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\partial^n v}{\partial \varepsilon^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \sin^n v \right)$$

4.4.4 Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{n+1}(t) = \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(e^{it} - e^{-it} \right)^{n+1} = \frac{1}{(2i)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} e^{i(n+1-2k)t}$$

donc

$$\frac{d^n}{dt^n} (\sin^{n+1} t) = \frac{1}{(2i)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (i(n+1-2k))^n e^{i(n+1-2k)t}$$

$$\left| \frac{d^n}{dt^n} (\sin^{n+1} t) \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} |n+1-2k|^n$$

Mais comme $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $|n+1-2k| \leq n+1$ alors

$$\left| \frac{d^n}{dt^n} (\sin^{n+1} t) \right| \leq (n+1)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{d^n}{dt^n} (\sin^{n+1} t) \right| \leq (n+1)^n$$

Ensuite ; soit $z \in \mathbb{C}$; alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\sin^n t) \cdot \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{n^{n-1}}{n!} |z|^n$$

le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\sin^n t) \frac{z^n}{n!}$ est donc supérieur ou égal à celui de $\sum \frac{n^{n-1}}{n!} z^n$ qu'on va noter R_1 . En utilisant la formule de Stirling, si $z \neq 0$ alors:

$$\frac{n^{n-1}}{n!} z^n \sim n^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n z^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(ze)^n}{n^{3/2}}$$

la suite $\left(\frac{n^{n-1}}{n!} z^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée si et seulement si la suite $((ze)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, ce qui est équivalent à $|z| \leq \frac{1}{e}$. On en déduit que $R_1 = \frac{1}{e}$.

Résultat de cours

La formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Attention

Lorsqu'on écrit une formule d'équivalence, toujours vérifier si elle ne se ramène pas à l'équivalence d'une expression donnée avec 0.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\sin^n t) \frac{z^n}{n!}$ est $\geq \frac{1}{e}$.

On peut démontrer que

$$\forall (t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, v(t, \varepsilon) = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\sin^n t) \frac{\varepsilon^n}{n!}$$

4.5. Expression de v faisant intervenir une série de FOURIER de la variable t

Soit $\varepsilon \in]-1, 1[$. On rappelle que la fonction $v_\varepsilon : t \mapsto v(t, \varepsilon) - t$, définie sur \mathbb{R} est 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^1 et impaire. On notera $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites des coefficients de FOURIER trigonométriques de v_ε .

4.5.1 Puisque v_ε est impaire alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.5.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, encore par imparité de v_ε ,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v_\varepsilon(t) \sin(nt) dt$$

$\psi_\varepsilon = v_\varepsilon + \text{id}_{\mathbb{R}}$ est la bijection réciproque du \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme φ_ε de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On pose $t = \varphi_\varepsilon(u)$. Ce qui revient à poser $u = \psi_\varepsilon(t) = t + v_\varepsilon(t)$. Sachant que $\varphi_\varepsilon(0) = 0$ et $\varphi_\varepsilon(\pi) = \pi$ alors

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (u - \varphi_\varepsilon(u)) \sin(n\varphi_\varepsilon(u)) \varphi_\varepsilon'(u) du$$

Précision

On intègre ici sur un segment, on n'a pas donc vraiment besoin que le changement de variable soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On le signale ici juste par commodité de calcul.

Le calcul suivant démarre avec une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-(u - \varphi_\varepsilon(u)) \frac{\cos(n\varphi_\varepsilon(u))}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi (1 - \varphi'_\varepsilon(u)) \cos(n\varphi_\varepsilon(u)) du \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (1 - \varphi'_\varepsilon(u)) \cos(n\varphi_\varepsilon(u)) du \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left(\int_0^\pi \cos(n\varphi_\varepsilon(u)) du - \int_0^\pi \varphi'_\varepsilon(u) \cos(n\varphi_\varepsilon(u)) du \right) \\
 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi_\varepsilon(u)) du - \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\sin(n\varphi_\varepsilon(u))}{n} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi_\varepsilon(u)) du
 \end{aligned}$$

et comme $\varphi_\varepsilon(u) = u - \varepsilon \sin u$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nu - n\varepsilon \sin u) du$$

Théorème du cours

Théorème de DIRICHLET de la CVN: Soit une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors sa série de FOURIER CVN sur \mathbb{R} et la somme de cette dernière est g .

4.6. D'après l'expression (22 - p.48) de la fonction J_n on a $b_n = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon)$.

Maintenant, puisque la fonction v_ε est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} alors d'après le théorème de la convergence normale d'une série de FOURIER,

$$\forall t \in \mathbb{R}, v_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

Ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, v(t, \varepsilon) = t + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} \sin(nt)$$

4.7. La fonction v_ε est continue donc d'après le théorème de PARSEVAL la série $\sum b_n^2$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v_\varepsilon(t)^2 dt$$

En posant comme dans la question précédente $t = \varphi_\varepsilon(u)$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi v_\varepsilon(t)^2 dt &= \int_0^\pi (u - \varphi_\varepsilon(u))^2 \varphi'_\varepsilon(u) du \\
 &= \int_0^\pi \varepsilon^2 \sin^2 u (1 - \varepsilon \cos u) du \\
 &= \varepsilon^2 \int_0^\pi \sin^2 u du - \varepsilon^3 \int_0^\pi \cos u \sin^2 u du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2u)) du - \frac{\epsilon^3}{3} \left[\sin^3(u) \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi \epsilon^2}{2} \end{aligned}$$

de quoi on déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(J_n(n\epsilon))^2}{n^2} = \frac{\epsilon^2}{4}$$