Extrait

Problème
Déterminants de Cauchy et de Gram
Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se notera I_p. Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\det M$ son déterminant et ${}^tM$ sa transposée.

$1^{\text{ère}}$ Partie
Calcul du déterminant de Cauchy

On considère un entier $n \geqslant 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m, associé aux familles $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, est le nombre, noté Δ_m, égal au déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.

2.1. On suppose qu'il existe $(i_1, i_2) \in \{1,\dots,n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose désormais que les réels $a_1,\dots,a_n$ sont deux à deux **distincts** *et on considère la fraction rationnelle*

$$R = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X - b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)} .$$

2.2. Justifier que les polynômes $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X - b_k)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

2.3. Décomposition en éléments simples de la fraction R

2.3.1. Préciser les pôles de la fraction rationnelle R et vérifier qu'ils sont tous simples.

2.3.2. En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction R est de la forme $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X + a_k}$ en précisant les expressions des réels α_k en fonction des a_k et des b_k.

2.4. Application au calcul de Δ_n

2.4.1. Montrer que
$$\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}.$$

2.4.2. En déduire que $\alpha_n \Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

2.4.3. Calculer Δ_2 puis montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\quad \Delta_n = \dfrac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i + b_j)}$.