Première partie

1a. On calcule $\chi_{(-\mathrm{M}_0)}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n + \mathrm{M}_0) = \det(\mathrm{M}_\mathrm{X})$, polynôme caractéristique de $-\mathrm{M}_0$, en commençant par les opérations élémentaires : $\mathrm{C}_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i$ puis $\mathrm{L}_i \longleftarrow \mathrm{L}_i - \mathrm{L}_1$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$:

$$\chi_{(-\mathrm{M}_0)}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}+n-1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \mathrm{X}-1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \mathrm{X}-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix} = (\mathrm{X}+n-1)(\mathrm{X}-1)^{n-1}$$

La matrice $-\mathrm{M}_0$ est symétrique réelle, ainsi selon le théorème spectrale, M_0 est diagonalisable et on a : $\mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \mathrm{Sp}(-\mathrm{M}_0)}} \mathrm{E}_\lambda(-\mathrm{M}_0)$

D'où $\mathbb{R}^n = \mathrm{E}_{1-n}(-\mathrm{M}_0) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{E}_1(-\mathrm{M}_0)$

On remarque que $-\mathrm{M}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (1-n) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de plus $\dim(\mathrm{E}_{1-n}(-\mathrm{M}_0)) = 1$ (multiplicité de $1-n$)

Ainsi comme $\mathrm{E}_1(-\mathrm{M}_0) = \mathrm{E}_{1-n}(-\mathrm{M}_0)^{\perp}$, on conclut que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(-\mathrm{M}_0) = \{1, 1-n\},\ \mathrm{E}_{1-n}(-\mathrm{M}_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } \mathrm{E}_1(-\mathrm{M}_0) \text{ est l'hyperplan d'équation } x_1 + \cdots + x_n = 1}$$

1b. Pour une matrice A, on pose $[\mathrm{A}]_{i,j}$ le coefficient en position (i,j). On a alors

$$\det(\mathrm{M}_\mathrm{X}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [\mathrm{M}_\mathrm{X}]_{i,\sigma(i)}$$

On remarque que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\prod_{i=1}^{n} [\mathrm{M}_\mathrm{X}]_{i,\sigma(i)} = \mathrm{X}^{\nu(\sigma)}$ car $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$, $[\mathrm{M}_\mathrm{X}]_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{X} & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi avec 1a., on a :

$$(\mathrm{X}+n-1)(\mathrm{X}-1)^{n-1} = \det(\mathrm{M}_\mathrm{X}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathrm{X}^{\nu(\sigma)}$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1)}$

2. On pose la fonction polynomiale $\mathrm{P} : x \mapsto (x+n-1)(x-1)^{n-1} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)}$.

Ainsi $\boxed{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) = \mathrm{P}(1) = n \cdot 0^{n-1} = 0}$ car $n - 1 \geqslant 1$.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{P}'(x) = (x-1)^{n-1} + (n-1)(x-1)^{n-2}(x+n-1) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) x^{\nu(\sigma)-1}$.

Ainsi $\boxed{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) = \mathrm{P}'(1) = n(n-1) \cdot 0^{n-2} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}}$

D'un côté on a :

$$\int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\int_0^1 x^{\nu(\sigma)}\mathrm{d}x = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\left[\frac{x^{\nu(\sigma)+1}}{\nu(\sigma)+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}$$

et d'un autre côté, on a, par intégration par parties :

$$\int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+n-1)(x-1)^{n-1}\mathrm{d}x = \left[(x+n-1)\frac{(x-1)^n}{n}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{(x-1)^n}{n}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n(1-n)}{n} - \left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}\right]_{x=0}^{x=1}$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n(1-n)}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = (-1)^n\frac{(1-n)(1+n)-1}{n(n+1)} = (-1)^n\frac{-n^2}{n(n+1)}$.

On peut alors conclure que $\boxed{\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}}$

3. Je note $\mathrm{P}_n = \{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\}$. On remarque que $\mathfrak{S}_n\setminus\mathrm{P}_n = \{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}$.
Selon 2., on a alors :

$$0 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma\in\mathrm{P}_n}\varepsilon(\sigma) + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\mathrm{P}_n}\varepsilon(\sigma) = \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} - \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}$$

d'où $\boxed{\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} = \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{S}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\}}$

Ainsi $\boxed{\text{la probabilité qu'une permutation de } \mathfrak{S}_n \text{ tirée uniformément au hasard soit de signature prescrite vaut } 1/2}$

4. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on a $\boxed{\nu(\sigma)=0 \text{ si et seulement si } \sigma\in\mathfrak{D}_n}$

En reprenant P de la question 2, on a alors

$$(n-1)(-1)^{n-1} = \mathrm{P}(0) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)0^{\nu(\sigma)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{D}_n}\varepsilon(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{D}_n\\ \varepsilon(\sigma)=1}} 1 - \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{D}_n\\ \varepsilon(\sigma)=-1}} 1$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=1\} = \mathrm{Card}\,\{\sigma\in\mathfrak{D}_n : \varepsilon(\sigma)=-1\} + (-1)^{n-1}(n-1)}$

5a. Les familles $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^m)$ et $(1,(\mathrm{X}-1),\dots,(\mathrm{X}-1)^m)$ sont constitués de $m+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]\setminus\{0\}$.
De plus elles sont libres car échelonnées en degrés. Comme $\dim(\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]) = m+1$,
on peut conclure que $\boxed{\text{les familles } (1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^m) \text{ et } (1,(\mathrm{X}-1),\dots,(\mathrm{X}-1)^m) \text{ sont des bases de } \mathbb{R}_m[\mathrm{X}]}$

5b. Soit $k\in[\![0,m]\!]$. On a, selon la formule du binôme dans l'anneau commutatif $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{X}^k = (\mathrm{X}-1+1)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\mathrm{X}-1)^i = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\mathrm{X}-1)^i - \sum_{i=k+1}^{m}0(\mathrm{X}-1)^i$$

Ainsi la colonne de rang $k+1$ de la matrice de l'application linéaire identité dans les bases considérées est constituée de :

$$\binom{k}{0},\dots,\binom{k}{k},0,\dots,0$$

On reconnaît les coefficients de la ligne de rang $k+1$ de la matrice M dans le même ordre. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{M}^{\top} \text{ est la matrice de l'application linéaire identité de } (1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^m) \text{ vers } (1,(\mathrm{X}-1),\dots,(\mathrm{X}-1)^m)}$$

5c. En remarquant que pour $k \in [\![0,m]\!]$, on a : $(\mathrm{X}-1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mathrm{X}^i(-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\mathrm{X}^i - \sum_{i=k+1}^{m} 0\mathrm{X}^i$

Ainsi les coefficients la $k+1$-ième colonne ($0 \leqslant k \leqslant m$) de la matrice identité entre les bases $(1,(\mathrm{X}-1),\dots,(\mathrm{X}-1)^m)$ au départ vers $(1,\mathrm{X},\dots,\mathrm{X}^m)$ à l'arrivée sont dans l'ordre : $(-1)^{k-i}\binom{k}{0}$, …, $(-1)^1\binom{k}{k}$, $(-1)^0\binom{k}{k}$, 0, …, 0.

Or cette matrice est l'inverse de $\mathrm{M}^\top$, car il s'agit de la réciproque de l'application linéaire identité en échangeant les bases de départ est d'arrivée. Ainsi $\mathrm{M} = \left(\mathrm{M}^\top\right)^\top$ est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = \left(\left(\mathrm{M}^\top\right)^{-1}\right)^\top$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{M} \text{ est inversible et } \mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{m-1}\binom{m-1}{0} & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ (-1)^m\binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} = \left((-1)^{j-i}\binom{i-1}{j-1}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m+1\\ 1\leqslant j\leqslant m+1}}}$

5d. On note $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ tels que $\forall k \in [\![0,m]\!],\quad u_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}v_\ell$. Alors on a $\mathrm{MV} = \mathrm{U}$.

Comme M est inversible, on a $\mathrm{V} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{U}$ puis : $\boxed{\forall k \in [\![0,m]\!],\quad v_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}u_\ell}$ selon 5c.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $\mathrm{D}_0 = 1$, on a alors avec un changement d'indice :

$$n! = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathrm{D}_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}\mathrm{D}_{n-i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathrm{D}_j$$

En effet, une permutation de $[\![1,n]\!]$ peut être caractérisée par le nombre $i \in [\![0,n]\!]$ des ses points fixes puis par le choix de la parties fixée par icelle ($\binom{n}{i}$ possibilités) et enfin du choix du dérangement sur les $n-i$ points restants (D_{n-i} possibilités) ce qui est compatible si $i = n$.

La formule reste valable pour $n = 0$.

On utilise alors la question précédente avec $m = n$, $u_j = j!$ et $v_j = \mathrm{D}_j$ pour obtenir

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathrm{D}_k = v_k = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}u_\ell = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}\ell! = k!\sum_{\ell=0}^{k}\frac{(-1)^{k-\ell}}{(k-\ell)!}$$

À l'aide d'un changement d'indices, on a alors $\boxed{\mathrm{D}_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}$

7a. Il est clair que $\mathrm{D}_n \neq 0$ car tout cycle de longueur n est un dérangement.

Y_n est à valeurs dans $\{-1,1\}$ si bien que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = -1) = 1$.

De plus à l'aide de 4 et comme on a une probabilité uniforme, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 1) - \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = -1) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{\mathrm{D}_n} \text{ puis } 2\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 1) = 1 + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{\mathrm{D}_n}$$

Ainsi la loi de Y_n est donnée par : $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = 1) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2\mathrm{D}_n} \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = -1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2\mathrm{D}_n}}$

7b. En reconnaissant une série exponentielle, on a $\mathrm{D}_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} n!\mathrm{e}^{-1}$

ainsi $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2\mathrm{D}_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)\mathrm{e}}{2n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'où $\boxed{\text{pour tout } \varepsilon \in \{-1,1\},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = \varepsilon) = \dfrac{1}{2}}$

8a. Z_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En reprenant 6, on a

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{Z}_n = k\right) = \mathrm{Card}\left(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \nu(\sigma) = k\}\right) = \binom{n}{k}\mathrm{D}_{n-k} = \frac{n! \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}$$

Ainsi $\boxed{\text{la loi de } \mathrm{Z}_n \text{ est donnée par } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n = k\right) = \frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}}$

8b. Pour tout entier naturel k, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n = k\right) = \frac{1}{\mathrm{e}\cdot k!}}$

La condition de l'énoncé « $k \leqslant n$ » est pour le moins étrange.

La « loi limite » est alors $\mathcal{P}(1)$ loi de Poisson de paramètre 1.

8c. *On commence par la méthode qui semble prévue par l'énoncé.*

On a $\mathrm{Z}_n \in \mathrm{L}^1$ car Z_n est finie.

Le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire vaut $\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}_n\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\right)}$ car

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}_n\right) = \sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}\left(\mathrm{Z}_n = k\right) = 0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}f_k(n)$$

où on a posé pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : n \in \mathbb{N} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(-1)^\ell}{\ell!} & \text{sinon} \end{cases}$.

La suite $\left(\frac{1}{\ell!}\right)_{\ell\geqslant 0}$ est décroissante de limite nulle donc selon les séries alternées : $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \sum_{\ell=0}^{p}\frac{(-1)^\ell}{\ell!} \leqslant \frac{(-1)^0}{0!} = 1.$

Ainsi on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_k(n)| \leqslant \frac{1}{(k-1)!}$$

Or la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1}f_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}$.

Par ailleurs, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}\cdot(k-1)!}$

D'où selon le théorème de la double limite, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}\cdot(k-1)!} = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ *Ce qui est conforme à l'intuition car 1 est l'espérance de $\mathcal{P}(1)$.*

Voici une méthode plus simple.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$ note F_i la variable aléatoire définie par $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{F}_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a $\mathrm{Card}(\mathrm{F}_i = 1) = (n-1)!$ ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{F}_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ d'où $\mathrm{F}_i \sim \mathcal{B}(1/n)$.

On remarque que $\mathrm{Z}_n = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}_i$ (on compte les points fixes). Ainsi par linéarité : $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Z}_n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1}$

On retrouve bien la limite ci-dessus !

9. On a $\mathfrak{S}_2 = \{(1\,2), \mathrm{Id}\} = \{(1\,2), (1)(2)\}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{2!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_2}\omega(\sigma) = \dfrac{1}{2}(1+2) = \dfrac{3}{2}}$

On a $\mathfrak{S}_3 = \{(1\,2\,3), (1\,3\,2), (3)(1\,2), (2)(1\,3), (1)(2\,3), (1)(2)(3)\}$ donc $\boxed{\dfrac{1}{3!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\omega(\sigma) = \dfrac{1}{6}(2\times 1 + 3\times 2 + 3) = \dfrac{11}{6}}$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on a $\omega(\sigma) \in [\![1, 4]\!]$.
L'identité est l'unique $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ tel que $\omega(\sigma) = 4$.
On a $\omega(\sigma) = 3$ si et seulement si σ est un transposition, il y en a $\binom{4}{2} = 6$.
On a $\omega(\sigma) = 1$ si et seulement si σ est un cycle de longueur 4 $\big(1,\, \sigma(1),\, \sigma^2(1),\, \sigma^3(1)\big)$ il y en a $3! = 6$.
Comme $4! = 24$, le nombre de $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ tel que $\omega(\sigma) = 2$ est donc de $24 - 1 - 6 - 6 = 11$.

Donc $\boxed{\dfrac{1}{4!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4}\omega(\sigma) = \dfrac{1}{24}(4 + 6\times 3 + 6\times 1 + 11\times 2) = \dfrac{50}{24} = \dfrac{25}{12}}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\boxed{s(n,n) = 1}$ car il n'y a que identité

et $\boxed{s(n,1) = (n-1)!}$ nombre des cycles de longueur n de la forme $\big(1,\, \sigma(1),\, \sigma^2(1),\, \ldots,\, \sigma^{n-1}(1)\big)$.

On suppose maintenant que n et k sont des entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
On pose $\mathrm{I}_1 = \{\sigma \in (\mathrm{X}_n = k) \mid \sigma(1) = 1\}$ et $\mathrm{J}_1 = \{\sigma \in (\mathrm{X}_n = k) \mid \sigma(1) \neq 1\} = (\mathrm{X}_n = k) \setminus \mathrm{I}_1$ de sorte que

$$\mathrm{Card}(\mathrm{I}_1) + \mathrm{Card}(\mathrm{J}_1) = \mathrm{Card}(\mathrm{X}_n = k) = s(n,k)$$

À $\sigma \in \mathrm{I}_1$, on peut associer la permutation de $[\![2, n]\!]$, σ' telle que $\sigma'(j) = \sigma(j)$.
Ainsi construite, en identifiant à $(\mathrm{X}_{n-1} = k-1)$ à l'ensemble des permutations de $[\![2, n]\!]$ composées de $k-1$ cycles à supports disjoints, l'application $\sigma \in \mathrm{I}_1 \longmapsto \sigma' \in (\mathrm{X}_{n-1} = k-1)$ est bijective. Ainsi

$$\mathrm{Card}(\mathrm{I}_1) = \mathrm{Card}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1) = s(n-1, k-1)$$

À $\sigma \in \mathrm{J}_1$, on peut associer $\gamma = (\sigma(1), \sigma')$ où $\sigma' : [\![2, n]\!] \longrightarrow [\![2, n]\!]$ telle que

$$\forall j \in [\![2, n]\!],\ \sigma'(j) = \begin{cases} \sigma(1) & \text{si } \sigma(j) = 1 \\ \sigma(j) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application σ' alors une permutation de $[\![2, n]\!]$ tel que le cycle de σ : $(1, \sigma(1), \ldots, \sigma^{k-1}(1))$ de longueur $k \geqslant 2$ devient le cycle de σ' : $(\sigma(1), \ldots, \sigma^{k-1}(1))$ de longueur $k-1$. Les autres cycles de σ' sont ceux de σ (cycles dont le support ne contient pas 1).
Ainsi construite l'application $\sigma \in \mathrm{J}_1 \longmapsto \gamma \in [\![2, n]\!] \times (\mathrm{X}_{n-1} = k)$ est bijective via une identification. Ainsi

$$\mathrm{Card}(\mathrm{J}_1) = \mathrm{Card}\left([\![2, n]\!] \times (\mathrm{X}_{n-1} = k)\right) = (n-1)s(n-1, k)$$

On peut alors conclure que $\boxed{s(n,k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k)}$

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On va établir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$.

On commence par remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $s(n,k) = 0$ si $k > n$ ou $k \geqslant 0$.
De plus la relation de récurrence établie en 10 est valable pour tout $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}$, il suffit de tester le cas $k \geqslant 2$ et $n = 2$ puis le cas $k = 1$ avec $n \geqslant 2$.

Pour <u>l'initialisation</u> (pour $n = 1$), on a

$$\prod_{i=0}^{1-1}(x+i) = x = s(1,1)x^1 = \sum_{k=1}^{1} s(1,k)x^k$$

Pour l'hérédité, soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété est vraie au rang n. On a alors :

$$\prod_{i=0}^{n}(x+i) = (x+n)\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^{k+1}+n\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = s(n,n)x^{n+1}+\sum_{p=2}^{n} s(n,p-1)x^p+\sum_{k=2}^{n} ns(n,k)x^k+ns(n,1)x^1$$

donc en utilisant 10, on a

$$\prod_{i=0}^{n}(x+i) = s(n+1,n+1)x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n}\left(s(n,k-1)+ns(n,k)\right)x^k + n\cdot(n-1)!\cdot x^1 = \sum_{k=1}^{n+1} s(n+1,k)x^k$$

On peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k}$

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je pose $\mathrm{P} = \prod_{i=0}^{n-1}(\mathrm{X}+i)$ de sorte que $\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\mathrm{X}^k$ selon 11.

Ainsi $\mathrm{P}' = \sum_{k=1}^{n} ks(n,k)\mathrm{X}^{k-1}$ donc $\mathrm{P}(1) = n!$ et $\mathrm{P}'(1) = \sum_{k=1}^{n} ks(n,k)$.

X_n est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ donc $\mathrm{X}_n \in \mathrm{L}^2$ et comme la probabilité est uniforme :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n\right] = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\mathrm{Card}(\mathrm{X}_n = k)}{\mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_n\right)} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{s(n,k)}{n!} = \frac{\mathrm{P}'(1)}{\mathrm{P}(1)} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}(1)$$

Comme P est scindé à racines simples, on a $\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\mathrm{X}+i} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{X}+k-1}$. Ainsi

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Avec le résultat admis, on conclut : $\boxed{\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n\right] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}$

13a. En reprenant le polynôme P ci-dessus, on a $\mathrm{P}'' = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)s(n,k)\mathrm{X}^{k-2}$

d'où $\mathrm{P}''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k)$. Ainsi

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \frac{\mathrm{P}''(1)}{\mathrm{P}(1)} = \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{P}}(1)$$

Or $\left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)' = \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{P}} - \frac{(\mathrm{P}')^2}{\mathrm{P}^2} = \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{P}} - \left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)^2$ donc comme $\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ selon 12, on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)'(1) + \left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)^2(1) = \left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)'(1) + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2$$

or $\left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)' = \sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{(\mathrm{X}+k-1)^2}$ donc

$$\left(\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\right)'(1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{i^2} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij}$$

On a bien $\boxed{\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}}$

13b. Comme $\mathbb{E}[\mathrm{X}_n] = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ks(n,k)$ (selon 12) et que $k(k-1)+k = k^2$,

alors avec 13a, on a $\boxed{\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) = \mathbb{E}[\mathrm{X}_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)}$

14a. En regroupant par paquets et selon 13, on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n\\ \omega(\sigma)=k}} k^2 = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}k^2 s(n,k) = \mathbb{E}[\mathrm{X}_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)$$

Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} = \mathrm{O}(1)$ car la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{i^2}$ converge et

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\ln(n)+\gamma+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \ln(n)^2 + 2\gamma\ln(n) + \gamma^2 + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{i^2} = \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ et selon 12, $\mathbb{E}[\mathrm{X}_n] = \ln(n)+\gamma+\mathrm{O}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$

En sommant ces développements asymptotiques, on a donc en prenant $\boxed{c = \gamma^2+\gamma}$

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2 + (2\gamma+1)\ln(n) + \gamma^2 + \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

14b. Par formule de l'espérance sur univers fini, on a

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\mathrm{X}_n(\sigma)-\ln(n))^2\mathbb{P}(\{\sigma\}) = \mathbb{E}\left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^2\right) - 2\ln(n)\mathbb{E}(\mathrm{X}_n) + \ln(n)^2$$

Selon la question précédente (et univers fini) et 12, on a

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2 + (2\gamma+1)\ln(n) + \gamma^2+\gamma+\mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad \text{et} \quad \ln(n)\mathbb{E}(\mathrm{X}_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)^2 + \gamma\ln(n) + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Par combinaison développements asymptotiques, on a donc en prenant $\boxed{c = \gamma^2+\gamma}$

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma^2 + \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

15. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$(|\mathrm{X}_n - \ln(n)| > \varepsilon\ln(n)) = \left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2 > \varepsilon^2\ln(n)^2\right) \subset \left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2 \geqslant \varepsilon^2\ln(n)^2\right)$$

Ainsi $(|\mathrm{X}_n - \ln(n)| > \varepsilon\ln(n)) = \left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2 > \varepsilon^2\ln(n)^2\right) \subset \left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2 \geqslant \varepsilon^2\ln(n)^2\right)$.
De plus $\varepsilon^2\ln(n)^2 > 0$ et $(\mathrm{X}_n-\ln(n))^2 \geqslant 0$, ainsi selon Markov

$$\mathbb{P}(|\mathrm{X}_n-\ln(n)| > \varepsilon\ln(n)) \leqslant \mathbb{P}\left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2 \geqslant \varepsilon^2\ln(n)^2\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2\right)}{\varepsilon^2\ln(n)^2}$$

Or selon 14b, $\mathbb{E}\left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma^2+\gamma+\mathrm{O}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

d'où $\dfrac{\mathbb{E}\left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2\right)}{\ln(n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui nous fournit $\mathrm{C} > 0$ tel que $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left((\mathrm{X}_n-\ln(n))^2\right)}{\ln(n)^2} \leqslant \mathrm{C}$.

et on a bien pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geqslant \mathbf{2}$, $\boxed{\mathbb{P}(|\mathrm{X}_n-\ln(n)| > \varepsilon\ln(n)) \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{\varepsilon^2\ln(n)}}$

Deuxième partie

16. On remarque que A est en escaliers sur tout segment. Ainsi $b'\mathrm{A}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence de l'intégrale. On va procéder par récurrence sur $n \geqslant 2$.

Pour <u>l'initialisation</u>, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} a_k b(k) = a_2 b(2)$ et $\displaystyle\mathrm{A}(2)b(2) - \int_2^2 b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t = \left(\sum_{2\leqslant k\leqslant 2} a_k\right) b(2) - 0.$

L'initialisation est bien vérifiée.

Pour <u>l'hérédité</u> : soit $n \geqslant 2$ tel que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = \mathrm{A}(n)b(n) - \int_2^n b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t.$

On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} a_k b(k) - \sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = a_{n+1}b(n+1)$ et comme $\mathrm{A}(n+1) = a_{n+1} + \mathrm{A}(n)$, on a aussi

$$\mathrm{A}(n+1)b(n+1) - \int_2^{n+1} b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t - \left(\mathrm{A}(n)b(n) - \int_2^n b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t\right) = a_{n+1}b(n+1) + \mathrm{A}(n)\left(b(n+1) - b(n)\right) - \int_n^{n+1} b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t$$

Or A est constante sur $[n, n+1[$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1} b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} b'(t)\mathrm{A}(n)\mathrm{d}t = \mathrm{A}(n)\left(b(n+1) - b(n)\right).$

Ainsi

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_k b(k) - \sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = \mathrm{A}(n+1)b(n+1) - \int_2^{n+1} b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t - \left(\mathrm{A}(n)b(n) - \int_2^n b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t\right)$$

Ce qui conclut l'héridité.

On peut conclure que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = \mathrm{A}(n)b(n) - \int_2^n b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t}$

17a. On a $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 1\\ p \text{ premier}}} p = 1 \leqslant 4 = 4^1$, $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 2\\ p \text{ premier}}} p = 2 \leqslant 16 = 4^2$ et $\displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant 3\\ p \text{ premier}}} p = 6 \leqslant 16 \leqslant 4^3$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \{1,2,3\}, \displaystyle\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^n}$

17b. On suppose que n est pair ainsi on peut écrire $n = 2q$ avec $q \geqslant 2$.

Comme $2q$ n'est pas premier et que la propriété est supposée vraie au rang $2q-1$, on a

$$\prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p\leqslant 2q\\ p \text{ premier}}} p = \prod_{\substack{p\leqslant 2q-1\\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^{2q-1} \leqslant 4^n$$

D'où $\boxed{\text{le résultat au rang } n \text{ si } n \text{ est pair}}$

17c. Soit p premier dans $[\![m+2, 2m+1]\!]$.

On a $\displaystyle p \mid (2m+1)! = \prod_{k=1}^{2m+1} k$ donc $\nu_p\left((2m+1)!\right) \geqslant 1$.

De plus $\forall k \in [\![1, m+1]\!]$, $p \wedge k = 1$ car p est premier $> m+1$. Ainsi $p \wedge (m! \cdot (m+1)!) = 1$ donc $\nu_p\left(m! \cdot (m+1)!\right) = 0$.

Par conséquent $\displaystyle\nu_p\left(\tbinom{2m+1}{m}\right) = \nu_p\left(\frac{(2m+1)!}{m! \cdot (m+1)!}\right) = \nu_p\left((2m+1)!\right) - \nu_p\left(m! \cdot (m+1)!\right) > 0.$

Donc $p \mid \binom{2m+1}{m}$, valable pour chaque p premier tel que $m+1 < p \leqslant 2m+1$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\prod_{\substack{m+1<p\leqslant 2m+1\\ p \text{ premier}}} p \text{ divise } \tbinom{2m+1}{m}}$

On a $\displaystyle\tbinom{2m+1}{m} \leqslant \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1} = 2 \cdot 4^m$

On a bien $\boxed{\tbinom{2m+1}{m} \leqslant 4^m}$

17d. Il s'agit d'une preuve par récurrence forte. L'initialisation est faite en 17a.
Pour l'hérédité commencée en 17b, il reste à traiter le cas où n est impair.

On écrit $n = 2m+1$ avec $m \geqslant 2$. On a $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p = \left(\prod_{\substack{p \leqslant m+1 \\ p \text{ premier}}} p\right) \times \left(\prod_{\substack{m+1<p \leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p\right)$

Comme $n-1-(m+1) = m-1 > 0$, on a $1 \leqslant m+1 \leqslant n-1$ ainsi par hypothèse de récurrence

$$0 \leqslant \prod_{\substack{p \leqslant m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^{m+1}$$

Comme $\displaystyle\prod_{\substack{m+1<p \leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p$ et $\binom{2m+1}{m} \in \mathbb{N}^*$ alors selon 17c, on a

$$1 \leqslant \prod_{\substack{m+1<p \leqslant 2m+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$$

Par produit, on alors $\displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^{2m+1} = 4^n$

Ce qui termine la récurrence. On peut conclure que : $\boxed{\text{si } n \text{ est un entier naturel non nul, alors } \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \leqslant 4^n}$

18. Dans $[\![1, n]\!]$, il y a $\mathrm{E}(n/p^k)$ multiples de p^k et $\mathrm{E}(n/p^{k+1})$ multiples de p^{k+1}. Il y a donc $\mathrm{E}(n/p^k) - \mathrm{E}(n/p^{k+1})$ éléments de valuation p-adique valant k. Remarquons que ce nombre est nul pour k assez grand.
Puisque ν_p est multiplicative ($\nu_p(ab) = \nu_p(a)\nu_p(b)$), on a

$$\nu_p(n!) = \sum_{a=1}^{n} \nu_p(a)$$

Dans cette somme de termes positifs, il y a $\mathrm{E}(n/p^k) - \mathrm{E}(n/p^{k+1})$ entiers a qui apportent une contribution égale à k. On a donc (la somme est en fait finie)

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^{k+1}}\right)\right)$$

Comme $\mathrm{E}(n/p^k)$ est nul pour k assez grand, on peut effectuer un décalage d'indice dans la seconde :

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right) - \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)$$

les termes se simplifient et il reste $\boxed{\nu_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right)}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$, on a alors dans $[0, +\infty]$ (termes positifs) :

$$\frac{n}{p} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{E}\left(\frac{n}{p^k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \frac{1}{1-1/p} = \frac{n}{p-1}$$

De plus $\dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)} = \dfrac{n\,(p-1+1)}{p(p-1)} = \dfrac{n}{p-1}$

Ainsi on a bien $\boxed{\dfrac{n}{p} - 1 < \nu_p(n!) \leqslant \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{p(p-1)}}$

19a. ln est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où $\forall k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ et $0 = \ln(1) \leqslant \displaystyle\int_1^2 \ln(t)\mathrm{d}t$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a selon Chasles

$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t = \ln(n+1) + \int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t$$

Or par intégrations par parties, on a $\displaystyle\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_{t=1}^{t=n} - \int_1^n 1\mathrm{d}t = n\ln(n) - n$.

Ainsi $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - (n\ln(n) - n) \leqslant \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$.

Or quand $n \to +\infty$, alors $\ln(1+1/n) \longrightarrow 0$, donc $\ln(1+1/n) = \mathrm{O}(\ln(n))$ puis $\ln(n+1) = \mathrm{O}(\ln(n))$

On a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \mathrm{O}(\ln(n))}$

19b. Par théorème de la décomposition en facteur premier, on a $n! = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n! \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}$

Soit $p \in [\![n+1, n!]\!]$ premier. Alors p ne divise pas $n!$ et donc $\nu_p(n!) = 0$. Ainsi $\displaystyle\prod_{\substack{n < p \leqslant n! \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)} = 1$

On a bien $\boxed{n! = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)} \times 1 = \prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{\nu_p(n!)}}$

D'où $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \nu_p(n!)\ln(p)$ puis avec 18 on a

$$\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \left(\frac{n}{p} - 1\right)\ln(p) < \ln(n!) \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\right)\ln(p)$$

or en utilisant 17, on a $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \ln(p) = \ln\left(\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p\right) \leqslant \ln(4^n) = 4\ln(n)$.

On en déduit que $\boxed{n\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - n\ln(4) < \ln(n!) \leqslant n\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + n\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}}$

19c. Quand $k \to +\infty$, on a $k^{3/2}\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} \sim \dfrac{\ln(k)}{k^{1/2}} \longrightarrow 0$ par croissance comparée.

donc $\dfrac{\ln(k)}{k(k-1)} = o\left(1/k^{3/2}\right)$ or la série $\sum 1/k^{3/2}$ converge.

Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \text{ converge}}$ car converge absolument.

19d. Soit $n \geqslant 2$. En posant $\mathrm{L} = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)}$ ($\in \mathbb{R}$ selon 19c), on a

$$0 \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k-1)} = \mathrm{L}$$

Ainsi selon 19b, on a $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(4) < \frac{\ln(n!)}{n} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} + \mathrm{L}$ donc

$$-\mathrm{L} \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} - \frac{\ln(n!)}{n} \leqslant \ln(4)$$

donc quand $n \to +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = \frac{\ln(n!)}{n} + \mathrm{O}(1)$

puis avec 19a, on a $\displaystyle\frac{\ln(n!)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) = \ln(n) - 1 + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \ln(n) + \mathrm{O}(1).$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \mathrm{O}(1)}$

20a. On considère la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$ définie par $a_k = \begin{cases} \dfrac{\ln(k)}{k} & \text{si } k \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi en posant A comme en 16, on a

$$\forall t \geqslant 2,\ \mathrm{A}(t) = \sum_{2\leqslant k\leqslant t} a_k = \sum_{\substack{p\leqslant t\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = \mathrm{R}(t) + \ln(t)$$

On pose également $b : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, +\infty[$.

Avec 16, on a alors $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k b(k) = \mathrm{A}(n)b(n) - \int_2^n b'(t)\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t$ d'où

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} b(p) = \mathrm{R}(n)b(n) + \ln(n)b(n) - \int_2^n b'(t)\mathrm{R}(t)\mathrm{d}t - \int_2^n b'(t)\ln(t)\mathrm{d}t$$

Comme $b' : t \mapsto \dfrac{-1}{t\ln(t)^2}$, on a alors

$$\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{1}{p} = \frac{\mathrm{R}(n)}{\ln(n)} + 1 - \int_2^n \frac{-\mathrm{R}(t)}{t\ln(t)^2}\mathrm{d}t - \int_2^n \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$$

On peut alors conclure que $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{1}{p} = 1 + \ln_2(n) - \ln_2(2) + \frac{\mathrm{R}(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2}\ \mathrm{d}t}$

20b. Comme R est continue par morceaux sur $[2, +\infty[$, alors $t \mapsto \dfrac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2}$ l'est.

Quand $t \to +\infty + \infty$, on note $n = \mathrm{E}(t)$. On a $n \leqslant t < n+1$ et $-\ln(t) + \ln(n) \leqslant \mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(n) \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t}$.

Ainsi $-\ln(1 + 1/n) = -\ln(n+1) + \ln(n) \leqslant \mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(n) \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t}$

Or $n = \mathrm{E}(t) \to +\infty$ donc $\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(n) \to 0$ d'où $\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(n) = \mathrm{O}(1)$

De plus selon 19d, on a

$$\mathrm{R}(n) = -\ln(n) + \sum_{\substack{p\leqslant n\\ p\text{ premier}}} \frac{\ln(p)}{p} = \mathrm{O}(1)$$

Ainsi $\mathrm{R}(t) = \mathrm{O}(1)$ donc

$$\frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right)$$

Or par calcul dans $[0, +\infty]$, on

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2} = \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_{t=2}^{t\to+\infty} = \frac{1}{\ln(2)} < +\infty$$

Ainsi la fonction continue $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

donc par comparaison, $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \dfrac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2} \text{ est intégrable sur } [2, +\infty[}$

20c. Je note $\boxed{c_1 = 1 - \ln_2(2) + \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t}$ qui est bien défini selon 20b et pour $n \geqslant 2$, on a

$$\left(1 - \ln_2(2) + \frac{\mathrm{R}(n)}{\ln(n)} + \int_2^n \frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2}\ \mathrm{d}t\right) - c_1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{R}(n)}{\ln(n)} - \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$$

Selon ce qui a été fait en 20b, on a $\mathrm{R}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)$ donc $\dfrac{\mathrm{R}(n)}{\ln(n)} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ et

$$\frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t(\ln(t))^2}\right)$$

où la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est positive et intégrable sur $[2, +\infty[$.
Ainsi par intégration des relations de comparaison :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{R}(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\right)$$

Par un calcul analogue en 20b, on a $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(n)}$.

Ce qui permet de conclure, avec 20a, que $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln_2(n) + c_1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)}$

21a. Soit $n \in \mathbb{N} \cap [1, x]$. On remarque que

$$\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0(\mathrm{mod} q)\} = \{bq : q \in [\![1, \mathrm{E}\,(x/q)]\!]\}$$

Comme l'application $b \mapsto bq$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0(\mathrm{mod} q)\}) - \frac{x}{q} = \mathrm{Card}\,([\![1, \mathrm{E}\,(x/q)]\!]) - \frac{x}{q} = \mathrm{E}\left(\frac{x}{q}\right) - \frac{x}{q}$$

donc $\boxed{\mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} \cap [1, x] : n \equiv 0(\mathrm{mod} q)\}) - \dfrac{x}{q} \in [-1, 0] \text{ est bornée en valeur absolue par 1 indépendant de } x \text{ et de } q}$

21b. Quand $x \longrightarrow +\infty$,

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{n\leqslant x}\left(\sum_{\substack{p|n\\ p\text{ premier}}}1\right)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p|n\\ p\text{ premier}}}1=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}\\ qp\leqslant x}}1=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}\left(\sum_{q=1}^{\mathrm{E}(x/p)}1\right)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}\mathrm{E}\left(\frac{x}{p}\right)$$

Ainsi avec 21a, on a

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\omega(n)-\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}\frac{x}{p}\right|\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}\left|\mathrm{E}\left(\frac{x}{p}\right)-\frac{x}{p}\right|\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}1\leqslant x+1$$

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}\frac{1}{p}+\mathrm{O}(1)$$

À l'aide de 20a, on peut conclure que $\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)\underset{x\to+\infty}{=}\ln_2(x)+\mathrm{O}(1)}$

22a. Quand $x \longrightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2=\frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2\right)-\frac{2\ln_2(x)}{x}\sum_{n\leqslant x}\omega(n)+\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln_2(x)^2}{x}$$

Selon 21b, on a $-\dfrac{2\ln_2(x)}{x}\displaystyle\sum_{n\leqslant x}\omega(n)=-2\ln_2(x)^2+\mathrm{O}\left(\ln_2(x)\right)$ et

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln_2(x)^2}{x}=\mathrm{E}(x)\frac{\ln_2(x)^2}{x}=\ln_2(x)^2+\ln_2(x)\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\frac{\ln(x)}{x}\left(\mathrm{E}(x)-x\right)$$

Comme $\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\dfrac{\ln(x)}{x}\left(\mathrm{E}(x)-x\right)=\mathrm{O}(1)$, alors $\displaystyle\sum_{n\leqslant x}\frac{\ln_2(x)^2}{x}=\ln_2(x)^2+\mathrm{O}\left(\ln_2(x)\right)$

Par somme de développements asymptotiques : $\boxed{\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln_2(x))^2\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2\right)-\ln_2(x)^2+\mathrm{O}\left(\ln_2(x)\right)}$

22b. L'idée est la même qu'en 21b, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\omega(n)^2=\left(\displaystyle\sum_{\substack{p_1|n\\ p_1\text{ premier}}}1\right)\left(\sum_{\substack{p_2|n\\ p_2\text{ premier}}}1\right)=\sum_{\substack{p_1|n\\ p_2|n\\ p_1,p_2\text{ premiers}}}1$. Ainsi

$$\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2=\sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_2\leqslant x\\ p_1,p_2\text{ premiers}}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_1|n\\ p_2|n}}1=\sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2\text{ premier}}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p_1|n\\ p_2|n}}1$$

C'est à dire $\boxed{\sum_{n\leqslant x}\omega(n)^2=\sum_{\substack{p_1\leqslant x\\ p_1\text{ premier}}}\sum_{\substack{p_2\leqslant x\\ p_2\text{ premier}}}\mathrm{Card}\left\{n\in\mathbb{N}^*:n\leqslant x,p_1\mid n\text{ et }p_2\mid n\right\}}$

22c. La somme proposée est le cardinal de l'ensemble des triplets (p_1,p_2,n) tels que p_1,p_2 sont des nombres premiers différents et $p_1p_2|n$ (ceci équivalent à $p_1|n$ et $p_2|n$ quand $p_1\wedge p_2=1$). C'est donc aussi

$$\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1\neq p_2\text{ premiers}}}\mathrm{E}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)=\sum_{\substack{p_1,p_2\leqslant x\\ p_1,p_2\text{ premiers}}}\mathrm{E}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)-\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}}\mathrm{E}\left(\frac{x}{p^2}\right)$$

On a tout d'abord

$$0 \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p^2}\right) \leqslant x\frac{\pi^2}{6} = \mathrm{O}(x\ln_2(x))$$

Pour estimer l'autre terme, on remarque que

$$\sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant x \\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \left(\frac{x}{p_1p_2} - 1\right) \leqslant \sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant x \\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right) \leqslant \sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant x \\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2}$$

Avec 20c,

$$\sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant x \\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \frac{x}{p_1p_2} = x\left(\sum_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}\right)^2 = x\ln_2(x)^2 + \mathrm{O}(x\ln_2(x))$$

et ainsi

$$x\ln_2(x)^2 + \mathrm{O}(x\ln_2(x)) - \alpha(x) \leqslant \sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant x \\ p_1,p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right) \leqslant x\ln_2(x)^2 + \mathrm{O}(x\ln_2(x))$$

où $\alpha(x)$ est le nombre de couples (p_1, p_2) de nombres premiers tels que $p_1p_2 \leqslant x$.
Pour conclure à l'égalité demandée, il nous suffit de montrer que $\alpha(x) = \mathrm{O}(x\ln_2(x))$.
Pour un p_1 fixé, il y a au plus $\mathrm{E}\left(\frac{x}{p_1}\right)$ valeurs de p_2 convenables. On a donc

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p}\right) \leqslant x \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}$$

et la question 20c (ou ce qu'on a vu en 21b) donne en effet $\alpha(x) = \mathrm{O}(x\ln_2(x))$. On a bien

$$\boxed{\left(\sum_{\substack{p_1,p_2 \leqslant x \\ p_1 \neq p_2 \text{ premiers}}} \mathrm{Card}\left\{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x, p_1 \mid n \text{ et } p_2 \mid n\right\}\right) - x\ln_2(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x\ln_2(x)\right)}$$

22d. Avec 22b et 22c, on obtient que

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} \omega(n)^2 &= x\ln_2(x)^2 + \mathrm{O}(x\ln_2(x)) + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} \mathrm{Card}\left\{n \in \mathbb{N}^* : n \leqslant x, p \mid n\right\} \\ &= x\ln_2(x)^2 + \mathrm{O}(x\ln_2(x)) + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p}\right)\end{aligned}$$

On a vu en 21b que cette dernière somme vaut $x\ln_2(x) + \mathrm{O}(x)$. On a ainsi

$$\frac{1}{x}\left(\sum_{n \leqslant x} \omega(n)^2\right) = \ln_2(x)^2 + \mathrm{O}(\ln_2(x))$$

et avec 22a, on conclut que

$$\boxed{\frac{1}{x}\left(\sum_{n \leqslant x} \left(\omega(n) - \ln_2(x)\right)^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\ln_2(x)\right)}$$

23. L'ensemble $\mathcal{S} \cap [1, \sqrt{x}[$ est de cardinal $\leqslant \sqrt{x}$ et ainsi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Card}\{n < \sqrt{x} : n \in \mathcal{S}\} = 0$$

On s'intéresse désormais à l'ensemble

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cap [\sqrt{x}, x]$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathcal{S}',\ \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} \geqslant \sqrt{\ln_2(n)},\ 0 \leqslant \ln_2(x) - \ln_2(n) \leqslant \ln(2),\ \ln_2(n) \geqslant \ln_2(\sqrt{x})$$

Dans un premier temps, on écrit que

$$\sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} \geqslant \sum_{n \in \mathcal{S}'} \sqrt{\ln_2(n)} \geqslant \operatorname{Card}(\mathcal{S}') \sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}$$

ou encore

$$\operatorname{Card}(\mathcal{S}') \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}} \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)}$$

On va désormais majorer ce terme. Comme $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, on a (pour $n \in \mathcal{S}'$)

$$(\omega(n) - \ln_2(n))^2 \leqslant 2(\omega(n) - \ln_2(x))^2 + 2(\ln_2(x) - \ln_2(n))^2 \leqslant 2(\omega(n) - \ln_2(x))^2 + 2\ln(2)^2$$

On divise par $\ln_2(n)$ et on somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(n))^2}{\ln_2(n)} &\leqslant 2 \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{(\omega(n) - \ln_2(x))^2}{\ln_2(n)} + 2\ln(2)^2 \sum_{n \in \mathcal{S}'} \frac{1}{\ln_2(n)} \\
&\leqslant \frac{2}{\ln_2(x)} \sum_{n \in \mathcal{S}} (\omega(n) - \ln_2(x))^2 + \frac{x \ln(2)^2}{\ln_2(\sqrt{x})} \\
&\leqslant \frac{2x}{\ln_2(x)} \mathrm{O}(\ln_2(x)) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln_2(\sqrt{x})}\right) \text{ avec 22(d)} \\
&= \mathrm{O}(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Card}(\mathcal{S}') = \mathrm{O}\left(\frac{x}{\sqrt{\ln_2(\sqrt{x})}}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Card}\{n \leqslant x : n \in \mathcal{S}\} = 0}$$