Ex 1

Un anneau A est dit <u>régulier</u> si :

$$\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x = xyx$$

On considère un tel anneau A, et l'on introduit :

$$Z = \{x \in A \,/\, \forall a \in A,\ ax = xa\}$$

1) M. que Z est un sous-anneau de A.

2) M. que Z est régulier.

Ex 1

Un anneau A est dit <u>régulier</u> si :

$$\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x = xyx$$

On considère un tel anneau A, et l'on introduit :

$$Z = \{x \in A \ /\ \forall a \in A,\ ax = xa\}$$

1) M. que Z est un sous-anneau de A.

2) M. que Z est régulier.

Brouillon

$$x \in Z \overset{\text{déf}}{\iff} (\forall a \in A,\ ax = xa)$$

1) i) $1 \in Z \overset{\text{déf}}{\iff} (\underbrace{\forall a \in A,\ a \times 1 = 1 \times a}_{\text{right}})$

ii) Soient $x, y \in Z$. ? que $x - y \in Z$

on a $ax = xa$; $ay = ya$

$\forall a \in A,\ a(x-y) = (x-y)a$???

$$a(x-y) = ax - ay = xa - ya \ (\text{car } x, y \in Z) = (x-y)a \quad \square$$

iii) $\forall x, y \in Z,\ x \times y \in Z$

Prop 3

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distincts deux à deux sont en somme directe.

Autrement dit

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des valeurs propres distinctes deux à deux alors $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_s}(f)$ sont en somme directe.

15/80

Rappels

1) Les sev $F_1, \dots, F_s$ sont en somme directe

$\iff \left[\forall (x_1, \dots, x_s) \in F_1 \times \dots \times F_s, \sum_{i=1}^{s} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_s = 0\right]$

très utilisé

$\left(\forall i, F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}\right)$ ✓ [rarement utilisé]

~~$F_1 \cap \dots \cap F_s = \{0\}$~~ Faux

~~$\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \{0\}$~~ Faux

2) F_1 et F_2 sont sev en somme directe $\iff$

$\iff F_1 \cap F_2 = \{0\}$

$\iff \left[\forall (x, y) \in F_1 \times F_2, x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0\right]$