Concours National Commun
Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1
Session 2024 - Filière MP

m.laamoum2@gmail.com [1]

Quelques rappels sur les variables aléatoires à densité :

- Une variable aléatoire X est dite à densité si il existe une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et admet un nombre fini de points de discontinuité , intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ telle que pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.
- La fonction de répartition de f, notée F_X, est définie par $F_X : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
  Pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$. En tout point x où f est continue on a $F_X'(x) = f(x)$.
- Si la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors l'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.
- Si la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors la variance de X est donnée par
  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

  et l'écart-type est égale à $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exercice

1. **a)** On a pour $A \geq 0$ $\displaystyle\int_0^A e^{-3x}dx = \frac{1 - \mathrm{e}^{-3A}}{3}$, donc l'intégrale I_0 converge et $I_0 = \frac{1}{3}$.

b) On sait que, pour tout entier naturel n , $x^{n+2}\mathrm{e}^{-3x} \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} 0$ donc $x^n\mathrm{e}^{-3x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de l'infinie , donc la fonction $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-3x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, d'où la convergence de l'intégrale I_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx &= \int_0^A x^{n+1}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-3x}}{3}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{3}\left[x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^A + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx = \frac{-A^{n+1}}{3}\mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx}$

3. Dans la relation précédente on fait tendre un A vers $+\infty$, on obtient pour tout entier naturel n , $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{(n+1)}{3}I_n}$.

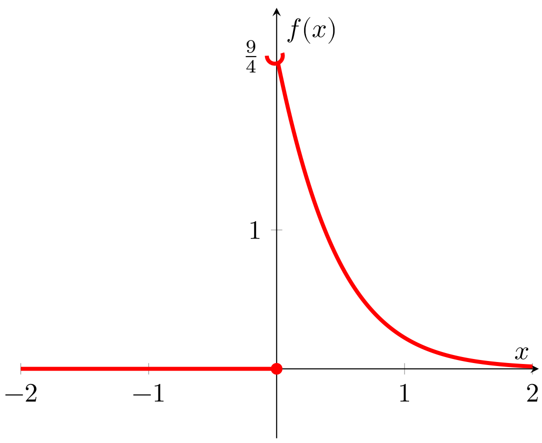
[1] `https://tinyurl.com/2qyzzrbd`

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. De la question précédente on a

$$I_n = \frac{n}{3}\frac{n-1}{3}\cdots\frac{1}{3}I_0 = \frac{n!}{3^n}\ I_0$$

puisque $I_0 = \frac{1}{3}$ alors $\boxed{I_n = \dfrac{n!}{3^{n+1}}}$.

5. Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, dont une représentation graphique :



f est une fonction de densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{9}{4}\left(I_0 + I_1\right) = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 1.$$

a) D'après 1.b) on a $xf(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$ par suite X admet une espérance .

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{9}{4}\int_{0}^{+\infty} x(1+x)\mathrm{e}^{-3x}dx \\ &= \frac{9}{4}\left(I_1 + I_2\right) \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{27}\right) \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{5}{12}}$.

b) De même la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc X admet une variance .

On a

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{9}{4}\left(I_2 + I_3\right) = \frac{1}{3}$$

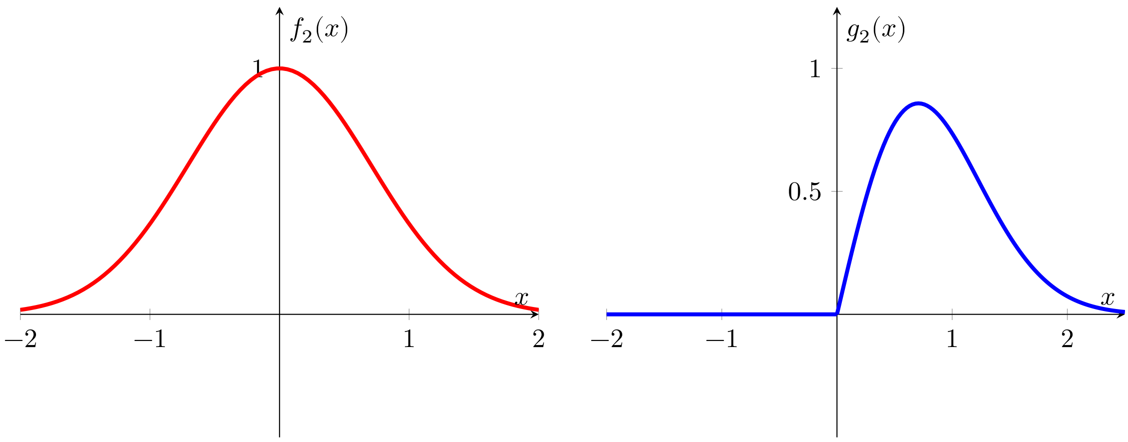
et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \dfrac{23}{144}}$.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

Une représentation graphique dans le cas $t = 2$:



Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1: Etude d'une variable aléatoire

1. **a)** Soit $t > 0$. La fonction $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente , pour tout entier n .

b) On a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \overset{u=x\sqrt{t}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

donc $\boxed{I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}}$.

c) On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{t} \left(\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{A^2}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_1 = \frac{1}{t}}$.

2. **a)** Soit $n \geq 2$ et $u \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^u x^n f_t(x)dx &= \int_0^u x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^u x^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right)' dx \end{aligned}$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-1}{t}\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right]_0^u + \frac{n-1}{t}\int_0^u x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

ainsi $\boxed{\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t}f_t(u) + \frac{n-1}{t}\int_0^u x^{n-2}f_t(x)dx}$.

b) Puisque $\frac{-u^{n-1}}{t}f_t(u) \underset{u\to+\infty}{\to} 0$ et les intégrales sont convergentes, alors par passage à la limite on trouve

$$\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx = \frac{n-1}{t}\int_0^{+\infty} x^{n-2}f_t(x)dx$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 2$, $\boxed{I_n = \frac{n-1}{t}I_{n-2}}$.

3. **a)** La fonction g_t est continue positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A > 0$ on a

$$\int_{-A}^{A} g_t(x)dx = \int_0^A txf_t(x)dx$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} txf_t(x)dx$ est convergente donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx$ est convergente , par passage à la limite on a

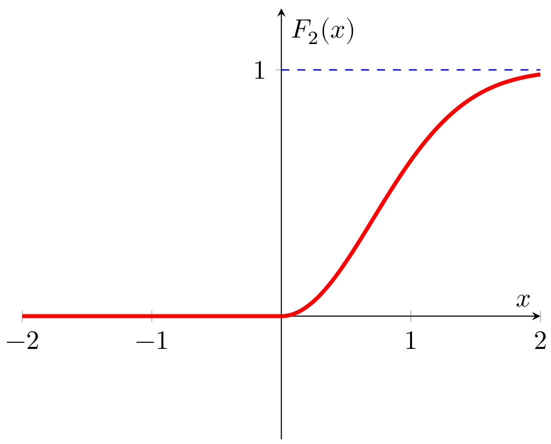
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = \int_0^{+\infty} txf_t(x)dx = tI_1 = 1$$

Ainsi g_t est une densité de probabilité.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_t(u)du \\ &= \int_0^x tu\mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2}}du \\ &= \int_0^x -\left(\mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2}}\right)' du \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{F_t(x) = 1 - \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}}$.



c) Pour tout $x \geq 0$, on a $xg_t(x) = tx^2 f_t(x)$ donc la fonction $x \mapsto xg_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite X_t admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg_t(x)dx \\ &= t\int_0^{+\infty} x^2 f_t(x)dx \\ &= tI_2 \end{aligned}$$

les questions 2)b) et 1)b) donnent : $I_2 = \frac{1}{t} I_0 = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}\left(X_t\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}}$.

d) Comme précédemment la fonction $x \mapsto x^2 g_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc X_t admet une variance $\mathbb{V}\left(X_t\right)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X_t)^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_t(x)dx \\ &= t\int_{0}^{+\infty} x^3 f_t(x)dx \\ &= tI_3 \end{aligned}$$

avec $I_3 = \frac{2}{t} I_1$ et $I_1 = \frac{1}{t}$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left((X_t)^2\right) = \frac{2}{t}}$.

Et on a $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}((X_t)^2) - \mathbb{E}(X_t)^2$ donc $\boxed{\mathbb{V}(X_t) = \frac{4-\pi}{2t}}$.

e) On a $\sigma\left(X_t\right) = \sqrt{\frac{4-\pi}{2t}}$, donc $\sigma\left(X_t\right) = 1$ si et seulement si $\boxed{t = \frac{4-\pi}{2}}$.

4. Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante:

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

a) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \\ &= \int_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} g_t(x)dx \\ &= F_t(\sqrt{2k+1}) - F_t(\sqrt{2k}) \end{aligned}$$

on sait que $F_t(x) = 1 - \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \mathrm{e}^{-tk}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})}$.

De même $\mathbb{P}(B_k) = F_t(\sqrt{2k+2}) - F_t(\sqrt{2k+1})$ et $\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \mathrm{e}^{-t(k+\frac{1}{2})}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}))}$.

b) **i)** La série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-tn}$ est géométrique est convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(A_n\right)$ est convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}}$.

ii) De même on a la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(B_n\right)$ est convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}}$.

iii) Les événements $(A_k)_{k\geq 0}$ sont deux à deux disjoints donc $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

De même on a $(B_k)_{k\geq 0}$ sont deux à deux disjoints et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

Donc on a $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$ si et seulement si $t = 0$, ce qui contredit le fait que $t > 0$.

Remarquons que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) > \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) < \frac{1}{2}$ ce qui justifie le résultat .

Les deux réunions ne sont pas complémentaires car $\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{R}^-) = 0$.

Partie 2: Calcul d'une intégrale impropre

Pour tout entier n tel que $n \geq 0$ et pour tout réel x, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-tx)^k}{k!} f_t(x)$. Pour tout entier n tel que $n \geq 0$, on définit le moment d'ordre n de la fonction f_t par, $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_t(x)dx$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 1)a) de la partie 1 l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k f_t(x)dx$ est convergente , par parité de f_t on a la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} x^k f_t(x)dx$, ce qui justifie l'existence de m_k .

- On a

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} f_t(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx$$

la fonction $x \mapsto x^{2k} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx$ est paire donc

$$m_{2k} = 2\int_0^{+\infty} x^{2k} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \quad = 2I_{2k}$$

d'après la question 2)b) de la partie 1 on a

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{t} I_{2k-2} \\ &= \frac{2k-1}{t}\frac{2k-3}{t}...\frac{1}{t} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{t^k \ (2k.(2k-2)...2)} I_0 \\ &= \frac{(2k)!}{t^k \ 2^k \ k!} I_0 \end{aligned}$$

comme $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$ alors $I_{2k} = \frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2t})^{2k+1} \ k!}$, ainsi $\boxed{m_{2k} = 2\frac{(2k)!\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2t})^{2k+1} \ k!}}$.

- De même $m_{2k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx$ et la fonction $x \mapsto x^{2k+1} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est impaire donc $\boxed{m_{2k+1} = 0}$.

2. Soit a, b et c des réels tels que $a > 0$. Pour tout réel x écrivons

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$, ce qui donne pour $A > 0$

$$\int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} dx$$

on fait le changement de variable $u = \sqrt{2a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$:

$$\int_{-A}^{+A} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{\sqrt{2a}\left(-A+\frac{b}{2a}\right)}^{\sqrt{2a}\left(A+\frac{b}{2a}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx$ est convergente , par passage à la limite on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$, d'où

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4a}}}$$

3. • On a $|\mathrm{e}^{-tx} f_t(x)| \leq |f_t(x)|$, la fonction f_t est intégrable sur $[0, +\infty[$ et elle est paire donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx$ est convergente .

• Remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\frac{t}{2}x^2+tx)} dx$$

En suite appliquons le résultat de la question précédente avec $a = \frac{t}{2}$, $b = t$ et $c = 0$, ce qui donne $\Delta = t^2$ et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_k \frac{(-tx)^k}{k!}$ converge et de somme e^{-tx} donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)}$

5. D'après la question précédente, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)$. Et on la majoration

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|tx|^k}{k!} f_t(x) \leq \mathrm{e}^{|tx|}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$$

la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{|tx|}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ vérifie $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la convergence dominée permet d'écrire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)dx\right)$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-tx)^k}{k!}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

Ainsi on a $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}}$.

6. D'après la question 1) on a $m_{2k+1} = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k m_k \frac{t^k}{k!} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f_t(x)dx$$

ce qui donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} m_{2k} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}$.

7. Soit $a \in]0, 1]$, dans $\displaystyle\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt$ on pose $u = \sqrt{t}$, ce qui donne

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt = 2\int_{\sqrt{a}}^1 \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}} du$$

on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt$ est convergente et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt = 2\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}} du$.

8. On a pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k}}{2^k k!}$ donc $\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{u^2}{2}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{u^{2k}}{2^k k!} du$, puisqu'il s'agit d'une série entière ,

ce qui donne $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(2k+1)2^{k-1}}}$

Partie 3: Produit de convolution et une transformé

1.

- On a $\mathbf{E} \subset \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et il contient la fonction nulle, donc $\mathbf{E} \neq \emptyset$.
  Soit φ, ψ dans $\mathbf{E}$ et α, β dans $\mathbb{R}$, donc il existe $M_\varphi, M_\psi, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$M_\varphi \geq 0, M_\psi \geq 0, \lambda_\varphi > 0, \lambda_\psi > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) \ , |\psi(x)| \leq M_\psi f_t(\lambda_\psi x) \qquad (1)$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq |\alpha| M_\varphi f_t(\lambda_\varphi x) + |\beta| M_\psi f_t(\lambda_\psi x)$$

soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ alors $f_t(\lambda_\varphi x) \leq f_t(\delta x)$ et $f_t(\lambda_\psi x) \leq f_t(\delta x)$, par suite

$$|\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)| \leq \left(|\alpha| M_\varphi + |\beta| M_\psi\right) f_t(\delta x)$$

donc $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathbf{E}$. Ce qui prouve que est $\mathbf{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Si on prend $M = \lambda = 1$ on obtient $f_t \in \mathbf{E}$.

2. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$, on garde les notations (1).

a) Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a $|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u))$ et

$$f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u)) \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right) \text{ et } f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u)) \underset{u \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

donc la fonction $u \mapsto f_t(\lambda_\varphi u) f_t(\lambda_\psi (x-u))$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par suite $u \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $\varphi * \psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Écrivons

$$(\varphi * \psi)(x) = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u) du$$

et posons $v = x - u$ alors pour tout $A > 0$

$$\int_{-A}^{+A} \varphi(u)\psi(x-u) du = \int_{x-A}^{x+A} \varphi(x-v)\psi(v) dv$$

par passage à la limite on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v)\varphi(x-v) dv$$

Ainsi $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
(f_t * f_t)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(u) f_t(x-u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}(u^2 + (u-x)^2)} du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(tu^2 - txu + \frac{1}{2}tx^2)} du
\end{aligned}$$

d'après la question 2) de la partie 2 on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{\frac{\Delta}{4t}} \text{ avec } \Delta = -(tx)^2$$

donc $(f_t * f_t)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}f_{\frac{t}{2}}(x)$ ainsi $\boxed{f_t * f_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}}f_{\frac{t}{2}}}$

d) On garde les notations de la question 1) . Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |\varphi * \psi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\,|\psi(x-u)|\,du \\ &\leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u))\ du \end{aligned}$$

Soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$, on a $f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u)) = f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))$ donc

$$|\varphi * \psi(x)| \leq M_\varphi M_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))\ du$$

le changement de variable $v = \delta u$ donne

$$\begin{aligned} |\varphi * \psi(x)| &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} f_t(v)\ f_t(\delta x - v)\ dv \\ &\leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta}(f_t * f_t)(\delta x) \end{aligned}$$

la question précédente donne $|\varphi * \psi(x)| \leq \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{t}}f_{\frac{t}{2}}(\delta x)$ et remarquons que $f_{\frac{t}{2}}(\delta x) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}\left(\frac{\delta x}{\sqrt{2}}\right)^2} = f_t(\frac{\delta x}{\sqrt{2}})$.
Il suffit donc de prendre $M_{\varphi*\psi} = \frac{M_\varphi M_\psi}{\delta}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$ et $\lambda_{\varphi*\psi} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, ce qui justifie que $\varphi * \psi$ est un élément de $\mathbf{E}$.

3. Soit φ un élément de $\mathbf{E}$. On définit la fonction $\widehat{\varphi}$ par $\widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du.$

a) Soit $x, u \in \mathbb{R}$ on a

$$|\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)| \leq M_\varphi \mathrm{e}^{-xu} f_t(\lambda_\varphi u)$$

comme $\mathrm{e}^{-xu}f_t(\lambda_\varphi u) \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et $\mathrm{e}^{-xu}f_t(\lambda_\varphi) \underset{u\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ alors la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-xu}f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi $\widehat{\varphi}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,u) & \mapsto & \mathrm{e}^{-xu}\varphi(u) \end{array}\right.$, les dérivées partielles de h par rapport à x existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
On a $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,u) = u^2\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)$ et pour tout $(x,u) \in \mathbb{R}^2$
Soit $A > 0$, on a pour tout $(x,u) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,u)\right| \leq u^2\mathrm{e}^{|xu|}\,|\varphi(u)| \leq M_\varphi u^2 \mathrm{e}^{A|u|} f_t(\lambda_\varphi u)$$

la fonction $u \mapsto M_\varphi u^2 \mathrm{e}^{|xu|} f_t(\lambda_\varphi u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comme dans a)), c'est donc une fonction de domination. Par le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale , $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-A, A]$, ceci est valable pour tout $A > 0$ donc $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\widehat{\varphi}'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du\ \ ,\ \widehat{\varphi}''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\mathrm{e}^{-xu}\varphi(u)du\ \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

4. Soient φ et ψ deux éléments de $\mathbf{E}$.

a) Pour tout (x,u) de $\mathbb{R}^2$, $\|(x,u)\| = \sqrt{u^2+x^2}$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, posons $N(x,u) = \sqrt{u^2+(x-u)^2}$. On vérifie facilement que N est une norme de $\mathbb{R}^2$, comme on est en dimension finie ces deux normes sont équivalentes, d'où l'existence de $\beta \geq \alpha > 0$ tel que $\|(x,u)\|\,\alpha \leq N(x,u) \leq \beta\,\|(x,u)\|$.
Ainsi il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout couple (x,u) de $\mathbb{R}^2$, $\boxed{u^2+(x-u)^2 \geq \alpha\left(u^2+x^2\right)}$.

b) Soit (x,u) de $\mathbb{R}^2$ on a
$$|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\lambda_\varphi u)\ f_t(\lambda_\psi(x-u))$$
soit $\delta = \min(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$ donc
$$|\varphi(u)\psi(x-u)| \leq M_\varphi M_\psi f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u))$$
remarquons que
$$f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u)) = \mathrm{e}^{-\frac{t\delta^2}{2}(u^2+(x-u)^2)}$$
d'après a) il existe $\alpha > 0$ tel que $u^2 + (x-u)^2 \geq \alpha\,(u^2+x^2)$ donc
$$f_t(\delta u)\ f_t(\delta(x-u)) \leq \mathrm{e}^{-\frac{t\delta^2}{2}(\alpha(u^2+x^2))}$$
Si on pose $\Phi : (x,u) \mapsto \varphi(u)\psi(x-u)$. Soit $\phi_1 : x \mapsto M_\varphi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, on a alors
$$|\Phi(x,u)| \leq \phi_1(x)\phi_2(u)$$
Le résultat admis au début de la partie permet d'écrire
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi * \psi)(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)du\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\psi(x-u)dx\right)du\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-u)dx\right)du\end{aligned}$$
le changement de variable $x-u=v$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-u)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx$, par suite
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi*\psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx}$$
c) Soit $\omega \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-\omega x}\varphi(x)$ et $\psi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-\omega x}\psi(x)$. Avec les notations de la question b) on définies les fonctions suivantes :
$\phi_1 : x \mapsto M_\varphi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2-\omega x}$ et $\phi_2 : x \mapsto M_\psi \mathrm{e}^{-\frac{t\alpha\delta^2}{2}x^2-\omega x}$, qui sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
Le résultat de la question b) appliqué à φ_0 et ψ_0 donne
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi_0*\psi_0)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_0(x)dx$$
qui se traduit par
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega u}\varphi(u)\mathrm{e}^{-\omega(x-u)}\psi(x-u)du\right)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\psi(x-u)du\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega x}\varphi(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\omega x}\psi(x)dx\end{aligned}$$
Ainsi pour tout réel ω on a $\boxed{\widehat{(\varphi*\psi)}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega).\widehat{\psi}(\omega)}$.

Partie 4: Une suite de fonctions construite à partir du produit de convolution

On note $\mathbf{E}_1$ l'ensemble des fonctions ψ de $\mathbf{E}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx = 1$. Pour toute fonction ϕ de $\mathbf{E}_1$, on considère la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_1 = \phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\phi_n = \phi_{n-1} * \phi_1$

1. Montrons le par récurrence sur n.

On a $\phi_1 \in \mathbf{E}_1$, supposons que $\phi_n \in \mathbf{E}_1$, d'après la question 2) de la partie 3 on a $\phi_{n+1} = \phi_n * \phi_1 \in \mathbf{E}$.

La question 4)b. donne

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n+1}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_n * \phi_1)(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)dx.\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)dx \\ &= 1\end{aligned}$$

donc $\phi_{n+1} \in \mathbf{E}$. D'où pour tout entier $n \geq 1$, $\phi_n \in \mathbf{E}_1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 2) de la partie 3 on a

$$\widehat{\phi_n}(x) = \widehat{\phi_{n-1} * \phi_1}(x) = \widehat{\phi_{n-1}}(x).\widehat{\phi_1}(x) = \widehat{\phi_n}(x).\hat{\phi}(x)$$

par suite $\boxed{\widehat{\phi_n}(x) = \left(\hat{\phi}(x)\right)^n}$.

3. On prend $\phi = \left(\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right) f_t$.

a) Par récurrence sur $n \geq 1$.

- On a $\phi_1(x) = C_1(t)\ \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ avec $C_1(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$.
- Supposons que $\phi_n(x) = C_n(t)\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}$, alors

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(x) &= (\phi_n * \phi)(x) \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}}C_n(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2n}-t\frac{(x-u)^2}{2}}du \\ &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}}C_n(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2n}((n+1)u^2-2nux+nx^2}du\end{aligned}$$

simplifions l'exposant

$$t\frac{u^2}{2n} + t\frac{(x-u)^2}{2} = \frac{t(n+1)}{2n}u^2 - tux + \frac{t}{2}x^2$$

la question 2) de la partie 2 nous donne, avec $a = \frac{t(n+1)}{2n}$ et $\Delta = -\frac{t^2x^2}{n}$

$$\phi_{n+1}(x) = C_n(t)\sqrt{\frac{n}{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{-tx^2}{2(n+1)}}$$

Nous obtenons le résultat pour $n+1$ avec $C_{n+1}(t) = C_n(t)\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

- Cette relation permet d'avoir $C_n(t) = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}...\sqrt{\frac{1}{2}}C_1(t)$ par suite $C_n(t) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}$
- Finalement on a pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}}$.

b) Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x}\phi_n(x)dx = \sqrt{\frac{t}{2n\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\sqrt{\frac{t}{n}}x}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2n}}dx$$

le changement de variable $s = \sqrt{\frac{t}{n}}x$ donne

$$\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-us}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}ds = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(s+u)^2}{2}}ds$$

et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(s+u)^2}{2}}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, ainsi $\boxed{\widehat{\phi_n}\left(u\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}u^2}}$

4. Soit ϕ un élément quelconque de $\mathbf{E}_1$. On pose pour tout entier naturel non nul n

$$M_{n,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_n(u)du, \quad M_{n,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\phi_n(u)du \text{ et } V_n = M_{n,2} - M_{n,1}^2$$

a) La question 3) de la partie 3 permet d'établir par récurrence que $\widehat{\phi_n}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ de plus $M_{n,1} = -\left(\widehat{\phi_n}\right)'(0)$ et $M_{n,2} = \left(\widehat{\phi_n}\right)''(0)$.

Donc $\widehat{\phi_n}$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$\widehat{\phi_n}(t) = 1 + \left(\widehat{\phi_n}\right)'(0)t + \frac{1}{2}\left(\widehat{\phi_n}\right)''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - M_{1,n}t + \frac{1}{2}M_{2,n}t^2 + o(t^2).$$

b) On a la relation $\widehat{\phi_n}(t) = \left(\hat{\phi}(t)\right)^n$ et

$$\begin{aligned}\left(\hat{\phi}(t)\right)^n &= \left(1 - M_{1,1}t + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n \\ &= 1 - nM_{1,1}t + \left(\frac{n}{2}M_{2,1} + \frac{n(n-1)}{2}M_{1,1}^2\right)t^2 + o(t^2).\end{aligned}$$

Par unicité du D.L, on en déduit : $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1}^2$,
donc $V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = nM_{2,1} - nM_{1,1}^2 = nV_1$, ainsi $\boxed{M_{1,n} = nM_{1,1} \quad \text{et} \quad V_n = nV_1}$.

5. Si $M_{1,1} = 0$ alors $\widehat{\phi_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{2}M_{2,1}t^2 + o(t^2)\right)^n$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, pour n assez grand on a

$$\begin{aligned}\hat{\phi}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\lim_{n\to\infty} \widehat{\phi_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left(\frac{M_{2,1}t^2}{2}\right)}$.

- FIN -