Problème

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on note $\|f\|$ le réel $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Première partie

1. Soit $f \in E$ et F_0 la primitive de f qui s'annule en 0 :

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On cherche une primitive F de f qui vérifie en outre $\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$. On cherche donc cette primitive sous la forme $F = F_0 + c$, où c est une constante à déterminer.
Démontrer qu'il existe un unique choix du réel c tel que $\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Dans la suite du problème, l'unique primitive F de f qui vérifie $\int_0^1 F = 0$ sera notée $F = \varphi(f)$.

2. a) Soit $f \in E$. Expliquer pourquoi la fonction $\varphi(f)$ appartient encore à E. On a ainsi défini une application $\varphi : E \longrightarrow E$.
b) Démontrer que cette application φ est linéaire.

3. a) Déterminer le noyau de φ. L'application φ est-elle injective ?
b) L'application φ est-elle surjective ? On pourra chercher si la fonction F définie par $F(t) = 1$ admet un antécédent.
c) Quelles sont les fonctions $F \in E$ admettant un antécédent par φ ?

4. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre les points a et b pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$.

5. Soit $f \in E$ et $F = \varphi(f)$. On note G la primitive de F qui s'annule en 0 : $G(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Exprimer $G(0)$ en fonction de $G(x)$ grâce à la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2. Exprimer de même $G(1)$ en fonction de $G(x)$.
b) Démontrer :

$$\forall x \in [0,1], \quad xF(x) - \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = (x-1)F(x) - \int_x^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire :

$$\forall x \in [0,1], \quad \big|F(x)\big| \leqslant \left(\frac{x^2 + (1-x)^2}{2}\right)\|f\|.$$

d) Trouver une constante K (*indépendante* de x) telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \big|F(x)\big| \leqslant K\|f\|$$

(on a donc : $\forall f \in E, \|\varphi(f)\| \leqslant K\|f\|$).
e) Pouvez-vous trouver une fonction polynomiale f (simple !) pour laquelle on a $\|\varphi(f)\| = K\|f\|$?

Deuxième partie

On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales par :

$$P_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = \varphi(P_n).$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales P_1, P_2 et P_3 et les représenter (sommairement) sur le même graphique.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $P_n(1) = P_n(0)$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_n(x) = (-1)^n P_n(1-x)$.
a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q'_{n+1}(x) = Q_n(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 Q_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on $Q_n = P_n$.
c) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, P_n(1-t) = ??$
Qu'en déduire quant aux graphes des fonctions P_n ? Que dire de $P_n(\frac{1}{2})$ pour n impair ? de $P_n(0)$ et $P_n(1)$ pour n impair supérieur ou égal à 3 ?

4. Démontrer, par récurrence sur n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{P_{n+1-k}(x)}{k!} = \frac{x^n}{n!}$$

(on pourra remarquer que, pour $n \geqslant 1$, la relation à démontrer s'écrit $P_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \big(\frac{P_{n-1}(x)}{2!} + \cdots + \frac{P_0(x)}{(n+1)!}\big)$).