I Inégalité de Hoffman-Wielandt

I.A -

Q 1. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit P et $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Par propriétés de la trace et des matrices orthogonales, on a :

$$\|\mathrm{PMQ}\|_{\mathrm{F}}^2 = \mathrm{tr}\left(\mathrm{PMQ}(\mathrm{PMQ})^{\top}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{MQQ}^{\top}\mathrm{M}^{\top}\mathrm{P}^{\top}\mathrm{P}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{MI}_n\mathrm{M}^{\top}\mathrm{I}_n\right) = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}^2$$

On a ainsi : $\boxed{\|\mathrm{PMQ}\|_{\mathrm{F}} = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}}$

Q 2. Comme A et $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, le théorème spectral nous fournit U et $\mathrm{V} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que : $\mathrm{A} = \mathrm{UD_AU}^{\top}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{VD_BV}^{\top}$.

On a alors avec la question 1 et comme $\mathrm{U}^{\top} = \mathrm{U}^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \left\|\mathrm{U}^{\top}\left(\mathrm{UD_AU}^{\top} - \mathrm{VD_BV}^{\top}\right)\mathrm{V}\right\|_{\mathrm{F}}^2 = \left\|\mathrm{D_AU}^{\top}\mathrm{V} - \mathrm{U}^{\top}\mathrm{VD_BV}^{\top}\right\|$$

or $\mathrm{U}^{\top}\mathrm{V} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{V} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe

ainsi $\boxed{\text{il existe une matrice orthogonale } \mathrm{P} = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ telle que } \|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B}\|_{\mathrm{F}}^2}$

Q 3. Pour toute matrice $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}^2 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ (vu en cours).

De plus, selon la question précédente, on a :

$$\mathrm{D_AP} - \mathrm{PD_B} = (\lambda_i(\mathrm{A})p_{i,j} - p_{i,j}\lambda_j(\mathrm{B}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (p_{i,j}(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

ainsi $\boxed{\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B}))^2}$

I.B -

Q 4. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

On a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = 1$

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ 0 \leqslant m_{i,j} \leqslant 1$. Par conséquent $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}^2} \leqslant \sqrt{n^2} = n$

Ainsi $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notion indépendante de la norme car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie).

Pour k et $i \in [\![1,n]\!]$, les applications $\varphi_i : \mathrm{M} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^n m_{i,j}$, $\varphi_i' : \mathrm{M} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^n m_{j,i}$ et $\psi_{i,k} : \mathrm{M} \mapsto m_{i,k}$ sont continues car ce sont des formes linéaire en dimension finie au départ or

$$\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) = \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi_i^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} (\varphi_i')^{-1}(\{1\})\right) \bigcap \left(\bigcap_{1\leqslant i,k\leqslant n} \psi_{i,k}^{-1}(\mathbb{R}^+)\right)$$

De plus $\{1\}$ et $\mathbb{R}^+$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ et l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé de l'ensemble d'arrivée. De plus une intersection de fermés est un fermé
d'où $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie alors $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est un compact.
L'application f est une forme linéaire en dimension finie au départ elle est donc continue.
Ainsi selon le théorème des bornes atteintes, $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathcal{B}_n(\mathbb{R})}$

Q 5. On a par linéarité $f\left(\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{ii}+x\mathrm{E}_{jk}-x\mathrm{E}_{ik}-x\mathrm{E}_{ji}\right)-f(\mathrm{M})=x\left(f(\mathrm{E}_{ii})+f(\mathrm{E}_{jk})-f(\mathrm{E}_{ik})-f(\mathrm{E}_{ji})\right)$. Or

$$\begin{aligned}f(\mathrm{E}_{ii})-f(\mathrm{E}_{ik})+f(\mathrm{E}_{jk})-f(\mathrm{E}_{ji}) &= (\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2-(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B}))^2+(\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B}))^2-(\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2\\ &= (2\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})-\lambda_k(\mathrm{B}))(\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B}))+(2\lambda_j(\mathrm{A})-\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B}))(\lambda_i(\mathrm{B})-\lambda_k(\mathrm{B}))\\ &= (\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B}))(2\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B})-\lambda_k(\mathrm{B})-2\lambda_j(\mathrm{A})+\lambda_k(\mathrm{B})+\lambda_i(\mathrm{B}))\end{aligned}$$

donc $\boxed{f\left(\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{ii}+x\mathrm{E}_{jk}-x\mathrm{E}_{ik}-x\mathrm{E}_{ji}\right)-f(\mathrm{M})=2x\left(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{A})\right)\left(\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B})\right)\leqslant 0}$
car $\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_j(\mathrm{A})\geqslant 0$ et $\lambda_k(\mathrm{B})-\lambda_i(\mathrm{B})\leqslant 0$ car $j\geqslant i$ et $k\geqslant i$

Q 6. Par l'absurde si on avait $\forall k\in[\![1,n]\!],\ m_{k,k}=1$, on aurait $\forall i\neq j\in[\![1,n]\!],\ m_{i,j}=0$ vu la positivité et les sommes 1 selon les lignes (ou selon colonnes). D'où $\mathrm{M}=\mathrm{I}_n$ ce qui est absurde.
Ainsi $\{k\in[\![1,n]\!]\mid m_{k,k}\neq 1\}\neq\emptyset$
Ceci justifie l'existence de i minimum de la partie non vide de $\mathbb{N}$: $\{k\in[\![1,n]\!]\mid m_{k,ik}\neq 1\}$
On a alors $\forall j\in[\![1,i-1]\!]$, $m_{j,j}=1$ (il se peut que $i-1=0$)
Comme $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}m_{j,k}=1$ et que $\forall k,j\in[\![1,n]\!]$, $m_{j,k}\geqslant 0$
On a alors $\forall j\in[\![1,i-1]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}$, $m_{k,j}=m_{j,k}=0$
Par l'absurde si on avait $i=n$, alors on aurait $\displaystyle m_{n,n}=\sum_{k=1}^{n}m_{k,n}=1$ et $\displaystyle m_{n,n}=\sum_{k=1}^{n}m_{n,k}=1$
On aurait alors $\mathrm{M}=\mathrm{I}_n$ ce qui n'est pas
Ainsi $i<n$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_{j,i}=\sum_{j=i}^{n}m_{j,i}=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}=\sum_{k=i}^{n}m_{i,k}=1$
Comme $m_{i,i}\neq 1$ ceci nous fournit $j\in[\![i,n]\!]$ et $k\in[\![i,n]\!]$ tels que $m_{i,k}>0$ et $m_{j,i}>0$.
Je pose $x=\min\left(m_{i,k},m_{j,i}\right)$ de sorte que la matrice $\mathrm{M}_1=\mathrm{M}+x\mathrm{E}_{ii}+x\mathrm{E}_{jk}-x\mathrm{E}_{ik}-x\mathrm{E}_{ji}$ a ses coefficients positifs
Cette matrice vérifie les conditions de sommes égales à 1 sur les lignes et les colonnes donc $\mathrm{M}_1=\left(m_{i,j}^{(1)}\right)\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.
De plus selon Q5, on a $f(\mathrm{M}_1)\leqslant f(\mathrm{M})$ et on remarque qu'un des coefficients (d'indice (i,k) ou (j,i)) de M_1 est nul.
En réitérant le procédé, on obtient ainsi une suite de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(\mathrm{M})\geqslant f(\mathrm{M}_1)\geqslant\cdots f(\mathrm{M}_p)$
Comme le nombre de coefficients non nuls sur les rangées i décroit strictement, l'algorithme fini par s'arrêter sur une matrice $\mathrm{M}'\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position $(1,1)$ vaut 1.

$\boxed{\text{Il existe bien une matrice } \mathrm{M}'=\left(m'_{\ell,k}\right)_{1\leqslant\ell,k\leqslant n}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } f\left(\mathrm{M}'\right)\leqslant f(\mathrm{M}) \text{ et } m'_{j,j}=1 \text{ pour tout } j\in[\![1,i]\!]}$

Q 7. Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{M}=\mathrm{M}^{(0)}$.
On construit par récurrence $\mathrm{M}^{(k+1)}=\left(\mathrm{M}^{(k)}\right)'$ si $\mathrm{M}^{(k)}=\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq\mathrm{I}_n$ comme ci-dessus.
On remarque que là encore l'algorithme termine car le nombre de coefficients diagonaux distincts de 1 est strictement décroissant car dans Q6, seul le coefficient diagonal en position (i,i) change.
Autrement dit la suite $\left(\left|\left\{j\in[\![1,n]\!]\ \middle|\ m_{j,j}^{(k)}\neq 1\right\}\right|\right)_{k\geqslant 0}$ est une suite d'entiers naturels strictement décroissante, elle s'annule donc. Ainsi il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{M}^{(p)}=\mathrm{I}_n$.
De plus la suite finie $\left(f\left(\mathrm{M}^{(k)}\right)\right)_{k\in[\![0,p]\!]}$ est décroissante toujours selon Q6
ainsi $f(\mathrm{I}_n)=f\left(\mathrm{M}^{(p)}\right)\leqslant f\left(\mathrm{M}^{(0)}\right)=f(\mathrm{M})$ de plus on a clairement $\mathrm{I}_n\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$
On en déduit que $\boxed{\min\left\{f(\mathrm{M})\mid\mathrm{M}\in\mathcal{B}_n(\mathrm{R})\right\}=f\left(\mathrm{I}_n\right)}$

I.C -

Q 8. Je note la matrice $\mathrm{Q}=\left(p_{i,j}^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ comme $\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Q}\in\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

De plus, on a $\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2=f(\mathrm{Q})$ selon Q3 or $\displaystyle f(\mathrm{Q})\geqslant f(\mathrm{I}_n)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2$ selon Q7

On en déduit que $\boxed{\forall(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathrm{S}_n(\mathbb{R})^2,\quad \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(\mathrm{A})-\lambda_i(\mathrm{B}))^2\leqslant\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2}$

II Dénombrement des mots bien parenthésés

II.A -

Q 9. Pour la longueur 2 il y a uniquement : "()" et donc on a bien $\boxed{\mathrm{C}_1 = 1}$

Pour la longueur 4, les mots bien parenthésés sont : "(())" et "()()" et donc on a bien $\boxed{\mathrm{C}_2 = 2}$

Pour la longueur 6, les mots bien parenthésés sont : "()(())" et "()()()" et "(())()" et "(()())" donc $\boxed{\mathrm{C}_3 = 4}$

Q 10. Un mot de longueur $2n$ constitué de parenthèses est une suite finie avec deux choix possibles par termes. Il y en a donc 2^{2n} qui est donc un majorant du cardinal de l'ensemble des mots bien parenthésés. Par conséquent : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{C}_n \leqslant 2^{2n}}$

Comme la série entière $\sum 2^{2k}x^k$ a un rayon de convergence de $1/4$ (série géométrique),

on en déduit : $\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum \mathrm{C}_k x^k \text{ est } \geqslant 1/4}$

Q 11. Un mot bien parenthésé de longueur $2k$ est de la forme $(m)m'$ où m et m' sont deux mots bien parenthésés de longueurs respectives $2i$ et $2k-2i-2 = 2(k-i-1)$ avec $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Ainsi si i est choisi dans $[\![0, k-1]\!]$, on a $\mathrm{C}_i\mathrm{C}_{k-i-1}$ choix possibles (le cas de longueur 0 ne donnant qu'une seule possibilité).

$$\boxed{\text{Le nombre de mots bien parenthésés de longueur } 2k \text{ est donc } \mathrm{C}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{C}_i\mathrm{C}_{k-i-1}}$$

II.B -

Q 12. Le produit de Cauchy de la série entière par elle même aura même rayon de convergence qui est $\geqslant 1/4$.

Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On a alors

$$\mathrm{F}(x)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_{k-i}\right)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k+1-1}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_{k+1-1-i}\right)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_{k+1}x^k$$

d'où en effectuant le changement d'indice en passant par les sommes partielles, on a :

$$1 + x(\mathrm{F}(x))^2 = \mathrm{C}_0 + \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{C}_{k+1}x^{k+1} = \mathrm{C}_0 + \sum_{i=1}^{+\infty}\mathrm{C}_i x^i$$

On a bien $\boxed{\text{pour tout } x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \mathrm{F}(x) = 1 + x(\mathrm{F}(x))^2}$

Q 13. Par l'absurde on suppose l'existence de $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ tel que $f(x) = 0$.

Alors $2x\mathrm{F}(x) - 1 = 0$ puis d'après la question précédente : $\mathrm{F}(x) = 1 + \mathrm{F}(x)/2$ donc $\mathrm{F}(x) = 2$

Ainsi $4x - 1 = 0$ donc $x = 1/4$. Absurde !

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f\ :\ \begin{cases} \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x\mathrm{F}(x) - 1 \end{cases} \text{ ne s'annule pas}}$

Q 14. Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

Si $x = 0$ **:** , d'après 12, on a $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(x) = 1$.

Si $x \neq 0$ **:** Alors selon 12, $\mathrm{F}(x)$ est solution de l'équation : $x\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = 0$ d'inconnue X.

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4x = 1 - 4x > 0$.

Ainsi les deux solutions sont $\mathrm{X}_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$ et $\mathrm{X}_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

Par ailleurs f est continue sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ car F l'est sur son intervalle ouvert de convergence.

De plus f ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,

alors f y garde un signe constant selon le théorème des valeurs intermédiaires.

Et comme $f(0) = -1 < 0$, on déduit que $2x\mathrm{F}(x) < 1$.

Or $2x\mathrm{X}_1 \geqslant 1$ donc $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

En conclusion $\boxed{\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

Q 15. D'après le cours, pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est somme de série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!} x^k$ de rayon de convergence 1. Soit $u \in]-1,1[$. On a $-u \in]-1,1[$ et donc

$$\sqrt{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(1/2-i)}{k!}(-u)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2i-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(2i)\right)}{2^k \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(2i)\right) k!}(-u)^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)\left((2k-2)!\right)}{2^k \cdot 2^{k-1}\left((k-1)!\right)k!} u^k$$

On a ainsi le développement en série entière $\boxed{\sqrt{1-u} = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot (k-1)!\cdot k!} u^k \text{ de rayon de convergence } 1}$

Q 16. Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On pose $u = 4x$ de sorte que $|u| < 1$. D'après la question précédente, on a

$$1 - \sqrt{1-4x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\cdot((2k-2)!)}{4^k \cdot (k-1)!\cdot k!} u^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\cdot((2k-2)!)}{(k-1)!\cdot k!} x^k$$

Si $x \neq 0$, alors on a $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{((2k-2)!)}{(k-1)!\cdot k!} x^{k-1}$

Comme la somme d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence qui contient $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ selon 10. L'égalité précédente est valable pour $x = 0$ puis en effectuant un changement d'indices sur les sommes partielles, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!} x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on peut conclure que $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \mathrm{C}_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}}$

III Loi du demi-cercle, cas uniformément borné

III.A -

Q 17. La fonction $x \mapsto x^{2k+1}\sqrt{4-x^2}$ est impaire et $[-2,2]$ est symétrique par rapport à 0.

On en déduit que $\boxed{\text{pour } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } m_{2k+1} = 0}$

Q 18. On effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $x = 2\sin t$; $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\mathrm{d}t$.

Pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\cos(t) \geqslant 0$ donc $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$. Ainsi

$$m_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2(t)}\cdot 2\cos(t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2\ \mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

On a utilisé le fait que l'intégrale de la fonction $t \mapsto \cos(2t)$ est nulle sur une période. Ainsi $\boxed{m_0 = 1}$

Q 19. On effectue une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$m_{2k+2} = \frac{1}{-2(2\pi)}\int_{-2}^{2} x^{2k+1}\left(-2x(4-x^2)^{1/2}\right)\mathrm{d}x = \frac{-1}{4\pi}\left(\left[\frac{x^{2k+1}(4-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{2}\right) - \int_{-2}^{2}(2k+1)x^{2k}\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3/2}\mathrm{d}x$$

Ainsi $m_{2k+2} = \dfrac{2k+1}{6\pi}\displaystyle\int_{-2}^{2}(4x^{2k}-x^{2k+2})(4-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x$. d'où $3m_{2k+2} = 4(2k+1)m_{2k} - (2k+1)m_{2k+2}$

puis $(2k+4)m_{2k+2} = 4(2k+1)m_{2k}$, ce qui permet de conclure que $\boxed{m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2}m_{2k}}$

Q 20. Si k est impair cela a été vu en Q17.

On va montré par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $m_{2p} = \mathrm{C}_p$.

Q16 nous donne l'initialisation $m_0 = 1 = \mathrm{C}_0$.

Pour l'hérédité, on considère $p \in \mathbb{N}$ tel que $m_{2p} = \mathrm{C}_p$. On a alors selon Q19 et Q16 :

$$m_{2p+2} = \frac{2(2p+1)}{p+2} m_{2p} = \frac{2(2p+1)}{p+2} \mathrm{C}_p = \frac{2(2p+1)}{p+2} \frac{(2p)!}{(p+1)! \cdot p!} = \frac{2(p+1)(2p+1)!}{(p+2)! \cdot (p+1) \cdot p!} = \frac{(2p+2)!}{(p+2)! \cdot (p+1)!} = \mathrm{C}_{p+1}$$

On a bien $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ m_k = \begin{cases} \mathrm{C}_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}}$

III.B -

Q 21. On considère la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

On montre par récurrence que sur l'entier $k \geqslant 2$ que le coefficient de A^k en position $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est :

$$\left[\mathrm{A}^k\right]_{i_1 j} = \sum_{(i_2,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^{k-1}} a_{i i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k j}$$

donc $\mathrm{tr}\left(\mathrm{A}^k\right) = \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n} \left[\mathrm{A}^k\right]_{i_1 i_1} = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}$. Ainsi

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}_n^k\right) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k} \mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}$$

De plus les variables aléatoires $\mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}$ sont bornées ainsi par linéarité on a existence des membres et l'égalité : $\mathbb{E}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}_n^k\right)\right) = \displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}\right)$.

La matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{A}$ est symétrique réelle et je note ses valeurs propres $\mu_1 \ldots, \mu_n$ comptées avec multiplicité.

Les valeurs propres de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{A}\right)^k = \frac{1}{n^{k/2}}\mathrm{A}^k$ (encore symétrique réelle) sont : $\mu_1^k \ldots, \mu_n^k$.

Ainsi $\mathrm{tr}\left(\dfrac{1}{n^{1+k/2}}\mathrm{A}^k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i^k$ donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k = \dfrac{1}{n^{1+k/2}}\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}_n^k\right)$

Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}_n^k\right)\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}\right).$$

Q 22. À chaque cycle $\vec{\imath} = (i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ de longueur k dans $[\![1,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts,

on peut associer la liste $\mathrm{J}(i) = (j_1, \cdots, j_\ell) \in [\![1,n]\!]^\ell$ de ces ℓ sommets telle que $(j_i)_{1 \leqslant i \leqslant \ell}$ est croissante et l'application $\pi(i) : \alpha \in [\![1,k]\!] \mapsto \pi(i)(\alpha) \in [\![1,\ell]\!]$ telle que $\forall \alpha \in [\![1,k]\!], i_\alpha = j_{\pi(i)(\alpha)}$

L'application $i \longmapsto (\mathrm{J}(i), \pi(i))$ est bien définie sur l'ensemble cycles de longueur k dans $[\![1,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts à valeurs dans $[\![1,n]\!]^\ell \times [\![1,\ell]\!]^{[\![1,k]\!]}$. Elle est clairement injective et comme le cardinal de $[\![1,n]\!]^\ell \times [\![1,\ell]\!]^{[\![1,k]\!]}$ vaut $n^\ell \ell^k$.

Ainsi $\boxed{\text{le nombre de cycles de longueur } k \text{ dans } [\![1,n]\!] \text{ passant par } \ell \text{ sommets distincts est inférieur ou égal à } n^\ell \ell^k}$

Q 23. Toutes les variables aléatoires sont bornées et admettent des moments à tout ordre.

Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ell \leqslant (k+1)/2$. Soit $\vec{\imath} \in [\![1,n]\!]^k$ tel que $|\vec{\imath}| = \ell$.

On a $\left|\mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}\right| \leqslant \mathrm{K}^k$ donc $\left|\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}\right)\right| \leqslant \mathrm{K}^k$

Selon Q22, on en déduit que

$$\sum_{\substack{\vec{\imath} \in [\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}| = \ell}} \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2} \mathrm{X}_{i_2 i_3} \cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k} \mathrm{X}_{i_k i_1}\right)\right| \leqslant \mathrm{K}^k n^\ell \ell^k$$

ainsi $0 \leqslant \dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|=\ell}} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \leqslant K^k n^{\ell-1-k/2}\ell^k$

or $K^k n^{\ell-1-k/2}\ell^k \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ car $\ell-1-k/2 \leqslant -1/2 < 0$

donc $\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|=\ell}} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ selon les gendarmes

puis comme $\left\{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \mid |\vec{\imath}| \leqslant (k+1)/2\right\} = \displaystyle\bigcup_{1\leqslant\ell\leqslant(k+1)/2} \left\{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \mid |\vec{\imath}| = \ell\right\}$ (union disjointe finie)

Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2}} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0}$ (par somme finie)

Q 24. On suppose que le cycle $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ appartient à $\mathcal{A}_k$.

On peut alors trouver $p \in [\![1,k]\!]$ (avec la convention $i_{k+1} = i_1$) tel que l'arête (i_p, i_{p+1}) n'apparaît qu'une seul fois.

Je note alors Y le produit des $X_{i_1i_2}, X_{i_ii_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}$ dans lequel n'apparaît pas $X_{i_pi_{p+1}}$

de sorte que $X_{i_1i_2}X_{i_ii_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1} = X_{i_pi_{p+1}}Y$

Selon le lemme des koalas, les variables aléatoires Y et $X_{i_pi_{p+1}}$ sont indépendantes

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_ii_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right) = 0\times\mathbb{E}(Y) = 0}$

Q 25. Pour $k=1$ ou $k=2$, on a $\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k=\emptyset$ et donc la propriété est triviale.

Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geqslant 3$, on considère $\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k$.

A priori pour tout cycles de longueur $k+1$, il y a au plus k arêtes.

Mais en les regroupant par paquets (de cardinal d'au moins deux et l'un au moins de cardinal trois), il y a au plus $(k-1)/2$ arêtes distincts.

Toutefois par construction, il faut pouvoir relier les arêtes entres elles pour pouvoir passer par tous les sommets. Une succession de p arêtes passe ainsi par au plus $p+1$ sommets distincts.

Ainsi le nombre de sommets distincts de $\vec{\imath}$ est majoré par $(k-1)/2+1 = (k+1)/2$.

On a montré : que $\boxed{|\vec{\imath}| \leqslant \frac{k+1}{2}}$ pour tout $\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k$

Q 26. Si toutes les arêtes apparaissent exactement deux fois dans un cycle, chaque sommet apparaît autant de fois que le nombre d'arêtes où il est présent fois deux. Ainsi le nombre de sommets d'un cycle de de $\mathcal{B}_k$ est pair.

Ainsi $\boxed{\mathcal{B}_k=\emptyset \text{ si } k \text{ est impair}}$

Or ici $\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Puis $0 \leqslant \dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2}} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right|$

donc $\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ selon les gendarmes et Q23

et $\dfrac{1}{n^{1+k/2}} \displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{A}_k} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ selon Q24

On remarque que l'ensemble des cycles de longueurs k est l'union disjointe : $\mathcal{A}_k\cup\mathcal{B}_k\cup\mathcal{C}_k$.

Ainsi par somme et selon Q21 :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\cdots X_{i_{k-1}i_k}X_{i_ki_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Q 27. Lorsque l'on parcourt les arêtes d'un cycles, une parenthèse ouvrante n'est refermées qu'après et exactement une seule fois car le nombre d'occurrences de chaque arête est exactement deux. Ainsi $\boxed{\text{on obtient bien un mot bien parenthésé de longueur } k}$

Q 28. On a un mot de longueur k constitués de $k/2$ parenthèses ouvrantes et autant de fermantes.

Il suffit de choisir les arêtes correspondants aux parenthèses ouvrantes car chaque parenthèse fermante se verra automatiquement associée une arête.

De plus la remarque impose le choix de $\frac{k}{2}+1$ sommets distincts.

Pour le premier sommet, il y a $n=(n-1)+1$ choix possibles, le second $(n-1)=(n-2)+1$ choix possibles et pour le sommets de rang $\frac{k}{2}+1$, il y a $(n-\frac{k}{2}-1)+1=(n-\frac{k}{2})$ possibilités

$$\boxed{\text{Le nombre de cycles } \vec{\imath} \text{ qui correspondent à un mot bien parenthésé fixé est } \prod_{i=0}^{k/2}(n-i)}$$

Q 29. On remarque que

$$\sum_{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) = \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{A}_k} 0 + \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) + \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right)$$

Selon Q23 et Q25, on a $\displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{C}_k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par théorème des gendarmes. Enfin

$$\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) = \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k,|\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) + \sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k,|\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right)$$

et toujours selon Q23, on a $\displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k,|\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pour $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i,j}^2\right)=\mathbb{V}\left(\mathrm{X}_{i,j}\right)+\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i,j}\right)^2=1+0=1$

De plus pour $\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k$ tel que $|\vec{\imath}|\leqslant(k+1)/2$, on peut regrouper les variables aléatoires deux par deux puis par indépendance et lemme des coalitions, on a $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right)=1^{k/2}=1$.

Ainsi selon Q28 et la partie II :

$$\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k,|\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) = 1\times|\{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k \mid \vec{\imath}|=k/2+1\}| = \left(\prod_{i=0}^{k/2}(n-i)\right)\mathrm{C}_{k/2}$$

donc $\displaystyle\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k,|\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1+k/2}\mathrm{C}_{k/2}$

donc $\displaystyle\frac{1}{n^{1+k/2}}\sum_{\vec{\imath}\in\mathcal{B}_k,|\vec{\imath}|=k/2+1} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1i_2}\mathrm{X}_{i_2i_3}\cdots\mathrm{X}_{i_{k-1}i_k}\mathrm{X}_{i_ki_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{C}_{k/2}$

Par somme de limites et à l'aide de Q21, on a : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Lambda_{i,n}^k\right)=\mathrm{C}_{k/2}}$

III.C -

Q 30. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a selon Q21, Q20, Q26 et Q29 : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Lambda_{i,n}^k\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 x^k\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Comme tout polynôme est combinaison linéaire de X^k,

alors on a pour tout polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathrm{P}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2\mathrm{P}(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x}$

III.D -

Q 31. Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. On a

$$0\leqslant \mathrm{A}^{p+2q}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\|\Lambda_{i,n}|\geqslant\mathrm{A}}}|\Lambda_{i,n}|^p\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\|\Lambda_{i,n}|\geqslant\mathrm{A}}}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\leqslant\sum_{i=1}^n|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}$$

Comme $\displaystyle\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)<+\infty$ et $\mathrm{A}>0$, on peut conclure que $\boxed{\displaystyle\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\|\Lambda_{i,n}|\geqslant\mathrm{A}}}|\Lambda_{i,n}|^p\right)\leqslant\frac{1}{\mathrm{A}^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)}$

Q 32. On a donc $0 \leqslant \dfrac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leqslant \dfrac{1}{n\mathrm{A}^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)$

Or d'après Q29, on a : $\dfrac{1}{n\mathrm{A}^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\mathrm{C}_{p+q}}{\mathrm{A}^{p+2q}}$ $(\star)$ et selon Q10 $\dfrac{\mathrm{C}_{p+q}}{\mathrm{A}^{p+2q}} \leqslant \dfrac{2^{2(p+q)}}{\mathrm{A}^{p+2q}} = 2^p\left(\dfrac{2}{\mathrm{A}}\right)^{p+2q}$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $2^p\left(\dfrac{2}{\mathrm{A}}\right)^{p+2q} \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$

Ceci nous fournit $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^p\left(\dfrac{2}{\mathrm{A}}\right)^{p+2q_0} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

Ainsi $(\star)$ nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $\dfrac{1}{n\mathrm{A}^{p+2q_0}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) \leqslant \varepsilon$

On vient de montrer que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

On a bien montré que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) = 0}$

Q 33. On suppose que $p \in \mathbb{N}$ (P non nul).

Comme f est bornée, on a $|f(x) - \mathrm{P}(x)| = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}(x^p)$ ce qui nous fournit $\mathrm{B} > \mathrm{A}$ et $\mathrm{K}_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\mathrm{B}, +\infty[\,,\ |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \mathrm{K}_1|x|^p$$

De plus sur le segment $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, l'application $x \longmapsto \dfrac{|f(x) - \mathrm{P}(x)|}{|x|^p}$ est continue.

Ainsi le théorème des bornes atteintes, nous fournit $\mathrm{K}_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]\,,\ |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \mathrm{K}_2|x|^p$$

De même on trouve $\mathrm{B}' < -\mathrm{A}$, $\mathrm{K}_3 > 0$ et $\mathrm{K}_4 > 0$ tels que :

$$\forall x \in \,]-\infty, \mathrm{B}']\,,\ |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \mathrm{K}_3|x|^p \quad \text{et} \quad \forall x \in [\mathrm{B}', -\mathrm{A}]\,,\ |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \mathrm{K}_4|x|^p$$

En prenant $\mathrm{K} = \max(\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \mathrm{K}_4)$, on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\,]-\mathrm{A}, \mathrm{A}[\,,\ |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \mathrm{K}|x|^p}$

Q 34. En utilisant Q33, on a (les espérances existent bien par majorations)

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f - \mathrm{P}|\,(\Lambda_{i,n})\right) \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p\right)$$

Le théorème des gendarmes et Q32 permettent de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f - \mathrm{P}|\,(\Lambda_{i,n})\right) = 0}$

III.E -

Q 35. Soit P un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par inégalités triangulaires, on a : $\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \cdots$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) + \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{P}(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} |f-\mathrm{P}|(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x$$

On a les existences des espérances car f est bornée et d'après Q30.

Je note $\mathrm{N} = \|f-\mathrm{P}\|_{\infty,[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} = \sup\limits_{x\in[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} |f(x)-\mathrm{P}(x)|$ qui existe bien selon le théorème des bornes atteintes.

On a alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\leqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) \leqslant \mathrm{N} + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} |f-\mathrm{P}|(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{N}\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x = \mathrm{N}m_0 = \mathrm{N}$$

Ainsi $\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \cdots$

$$2\mathrm{N} + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) + \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{P}(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right|$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Je prends $\mathrm{A} = 3$.

Le théorème de Weierstrass nous fournit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|f-\mathrm{P}\|_{\infty,[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} \leqslant \varepsilon/4$.

Selon Q34 et Q30 :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) + \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{P}(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ceci nous fournit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\quad \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) + \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{P}(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon/2$$

On vient de montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x}$

IV Loi du demi-cercle, cas général

IV.A -

Q 36.

Méthode 1 : Soit $\varepsilon > 0$. Comme X est d'espérance finie. On a par définition des familles sommables :

$$+\infty > \mathbb{E}(|X|) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X = x) = \sup\left\{\sum_{x \in F} |x|\mathbb{P}(X = x) \mid F \subset X(\Omega), F \text{ fini}\right\}$$

La caractérisation de la borne supérieure, nous fournit F fini tel que $\mathbb{E}(|X|) \geqslant \sum_{x \in F} |x|\mathbb{P}(X = x) \geqslant \mathbb{E}(|X|) - \varepsilon$

Je pose $M = \max\{|x| \mid x \in F\}$ et on a : $\mathbb{E}(|X|) \geqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leqslant M}} |x|\mathbb{P}(X = x) \geqslant \mathbb{E}(|X|) - \varepsilon$

d'où par sommations par paquets :

$$0 \leqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| > M}} |x|\mathbb{P}(X = x) \leqslant \varepsilon$$

Soit $C \geqslant M$. La variable aléatoire $X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}$ admet une espérance car $\left|X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right| \leqslant |X|$.
Ainsi $\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leqslant C}} x\mathbb{P}(X = x) + 0\mathbb{P}(|X| > C) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leqslant C}} x\mathbb{P}(X = x)$

donc comme $\left|X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C} - X\right| = \left|X\mathbb{1}_{|X| > C}\right| \leqslant \left|X\mathbb{1}_{|X| > M}\right|$, alors on a

$$\left|\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) - \mathbb{E}(X)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\left|X\mathbb{1}_{|X| > M}\right|\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| > M}} |x|\mathbb{P}(X = x)$$

On vient de montrer $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall C \in \mathbb{R},\ C \geqslant M \Longrightarrow \left|\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) - \mathbb{E}(X)\right| \leqslant \varepsilon$

Méthode 2 : L'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on peut donc écrire $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ où (x_k) est une suite injective si $X(\Omega)$ est dénombrable et si $X(\Omega)$ est finie de cardinal c alors $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![0, c-1]\!]\}$ et $\forall k \geqslant c,\ x_k = 0$.
Ainsi par permutation sur une famille sommable puis lien avec une série absolument convergente, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\mathbb{P}(X = x_k)$$

Soit $C \in \mathbb{R}^+$. On a $\left|X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right| \leqslant |X|$.
Ainsi $X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ |x| \leqslant C}} x\mathbb{P}(X = x) + 0\mathbb{P}(X > C)$

Pour $k \in \mathbb{N}$, je pose : $g_k : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x_k\mathbb{P}(X = x_k) & \text{si } |x_k| \leqslant t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

De sorte que $\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(C)$

Par ailleurs, on a $g_k(C) \xrightarrow{C \to +\infty} x_k\mathbb{P}(X = x_k)$
Et on a

$$\forall C \in [0, +\infty[\,,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |g_k(C)| \leqslant |x_k|\,\mathbb{P}(X = x_k)$$

or la série $\sum_{k \geqslant 0} |x_k|\,\mathbb{P}(X = x_k)$ converge de somme $\mathbb{E}(|X|)$.

ainsi la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} g_k$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty[$ de somme $C \mapsto \mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right)$.

Ainsi selon le théorème de la double limite : $\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) \xrightarrow{C \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lim_{C \to +\infty} g_k(C)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\mathbb{P}(X = x_k)$

Conclusion : Par deux méthodes on a montré que $\boxed{\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X| \leqslant C}\right) \xrightarrow{C \to +\infty} \mathbb{E}(X)}$

Q 37. On a $\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2 \leqslant X_{ij}^2$ donc $X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}$ admet un moment d'ordre 2 et on a selon la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) = \mathbb{E}\left(\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2 = \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2$$

Avec la question précédente et comme X_{ij} et X_{ij}^2 sont d'espérances finies, on a

$$\mathbb{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)^2 \xrightarrow{C\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}\right)^2 = \mathbb{V}\left(X_{ij}\right)$$

or on sait que $\mathbb{V}\left(X_{ij}\right) = 1$. On en déduit que $\boxed{\lim_{C\to+\infty} \sigma_{ij}(C) = 1}$

Q 38. La limite précédente nous fournit un réel $C_0 > 0$ tel que $\forall C \geqslant C_0,\ \sigma_{ij}(C) \geqslant 1/2$ car $1/2 < 1$.

Ainsi selon le cours, pour $C \geqslant C_0$, la variable $\widehat{X}_{ij}(C)$ est bien définie et c'est la variable centrée réduite de $X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}$.

De plus pour $\omega \in \Omega$, on a $\left|\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)(\omega)\right| \leqslant C$.

Donc $\left|\mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)\right| \leqslant C$ d'où $\left|\widehat{X}_{ij}(C)(\omega)\right| \leqslant \dfrac{2C}{\sigma_{ij}(C)}$ par inégalité triangulaire

Ainsi $\boxed{\text{pour C assez grand, les variables } \widehat{X}_{ij}(C) \text{ sont bien définies, bornées, centrées, de variance 1}}$

Pour $1 \leqslant i \leqslant j$, on pose $\varphi_{ij} : x \longmapsto \dfrac{x\mathbb{1}_{[-C,C]}(x) - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)}{\sigma_{ij}(C)}$ où $\mathbb{1}_{[-C,C]}$ est la fonction caractéristique du segment $[-C, C]$; de sorte que $\widehat{X}_{ij}(C) = \varphi_{ij}\left(X_{ij}\right)$.

En appliquant le lemme des coalitions, on obtient

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } \widehat{X}_{ij}(C) \text{ sont mutuellement indépendantes pour } 1 \leqslant i \leqslant j}$$

Q 39. On a :

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(C)\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) - \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij}\right) &= X_{ij} - X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C} + \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)\\
&= X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} + \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}\right)\\
&= X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)
\end{aligned}$$

On a utilisé : $\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} + \mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C} = \mathbb{1}_{\Omega}$, $\mathbb{E}\left(X_{ij}\right) = 0$ et la linéarité de l'espérance.

On a bien montré que $\boxed{X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C) = \left(1 - \dfrac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij} + \dfrac{1}{\sigma_{ij}(C)}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)}$

Q 40. Je note $A(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)X_{ij}$ et $B(C) = \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)$

On montre facilement à l'aide de Q37 que

$$\mathbb{E}\left(A(C)^2\right) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(C)}\right)^2 \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Par ailleurs $\mathbb{E}(B(C)) = 0$ donc $\mathbb{E}\left(B(C)^2\right) = \mathbb{V}(B(C)) = \dfrac{\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)}{\sigma_{ij}(C)^2}$

or $\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right) = \mathbb{E}\left(\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right)$ donc

$$0 \leqslant \mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{ij}^2\mathbb{1}_{|X_{ij}|\leqslant C}\right)$$

Ainsi d'après Q36 et les gendarmes : $\mathbb{V}\left(X_{ij}\mathbb{1}_{|X_{ij}|>C}\right) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$

Ainsi par quotient de limites :

$$\mathbb{E}\left(B(C)^2\right) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Selon Cauchy-Schwarz, on a $|\mathbb{E}\left(A(C)B(C)\right)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left(A(C)^2\right)\mathbb{E}\left(B(C)^2\right)}$

donc selon les gendarmes

$$\mathbb{E}\left(A(C)B(C)\right) \xrightarrow{C\to+\infty} 0$$

Comme selon Q39, on a : $\mathbb{E}\left(\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(A(C)^2\right) + 2\mathbb{E}\left(A(C)B(C)\right) + \mathbb{E}\left(B(C)^2\right)$

On peut conclure que $\boxed{\lim_{C\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(X_{ij} - \widehat{X}_{ij}(C)\right)^2\right) = 0}$

IV.B -

Q 41.

Existences : Dans un premier temps, on va établir l'existence des espérances de l'inégalité.

On remarque que $\|M_n\|_F^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} X_{i,j}^2$

d'où $\mathbb{E}\left(\|M_n\|_F^2\right) = n < +\infty$ car $\mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) = \mathbb{V}\left(X_{i,j}\right) + \mathbb{E}\left(X_{i,j}\right)^2 = 1$

donc $\|M_n\|_F$ admet un moment d'ordre 2 et donc d'ordre 1.

C'est analogue pour $\widehat{M}_n(C)$ car les $\widehat{X}_{ij}(C)$ sont mutuellement indépendantes, centrées réduites.

Or par inégalité triangulaire : $0 \leqslant \left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F \leqslant \|M_n\|_F + \left\|\widehat{M}_n(C)\right\|_F$.

Ainsi $\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F$ est d'espérance finie.

De plus d'après Q8 appliquée à $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$ et la matrice nulle, on a $\sum_{i=1}^n \Lambda_{i,n}^2 \leqslant \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}M_n\right\|_F^2$

comme $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant 1 + x^2$, alors on a : $\sum_{i=1}^n |\Lambda_{i,n}| \leqslant n + \frac{\|M_n\|_F^2}{n}$

puis comme f est K-lipschitzienne, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant K|x|$ et donc :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right| \leqslant K + \frac{K\,\|M_n\|_F^2}{n^2}$$

Par linéarité la variable aléatoire $K\left(1 + \frac{\|M_n\|_F^2}{n^2}\right)$ admet une espérance

donc la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)$ est d'espérance finie et il en est de même pour $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)$.

L'inégalité : On a, selon Cauchy-Schwarz et Q8 :

$$\left|\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right) - \sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right| \leqslant K\sum_{i=1}^n \left|\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}\right| \leqslant K\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n 1\right)\left(\sum_{i=1}^n \left(\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda}_{i,n}\right)^2\right)} \leqslant K\sqrt{n}\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\widehat{M}_n(C)\right\|_F$$

donc $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F$

Avec la croissance et la linéarité de l'espérance et en utilisant pour X admettant une espérance que $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}\left(|X|\right)$

On obtient $\boxed{\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M}_n(C)\right\|_F\right)}$

Q 42. On a $\left\|\mathrm{M}_n-\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\right\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\mathrm{X}_{ij}-\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})\right)^2}$

Par calcul dans $[0,+\infty]$ avec des variables positives, on a selon Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\mathrm{M}_n-\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\right\|_{\mathrm{F}}\right)\leqslant\sqrt{\mathbb{E}(1)\mathbb{E}\left(\left\|\mathrm{M}_n-\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)}$$

Soit $i,j\in[\![1,n]\!]$ et $\mathrm{C}>\mathrm{C}_0$ (C_0 introduit en Q38). On a $\mathrm{X}_{ij}\sim\mathrm{X}_{11}$.
La loi donnant la variance et l'espérance, on montre facilement que $\left(\mathrm{X}_{ij}-\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})\right)\sim\left(\mathrm{X}_{11}-\widehat{\mathrm{X}}_{11}(\mathrm{C})\right)$
Ainsi $\mathbb{E}\left(\left\|\mathrm{M}_n-\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\right\|_{\mathrm{F}}^2\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{ij}-\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})\right)^2\right)=n^2\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{11}-\widehat{\mathrm{X}}_{11}(\mathrm{C})\right)^2\right)$
donc $\mathbb{E}\left(\left\|\mathrm{M}_n-\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\right\|_{\mathrm{F}}\right)\leqslant n\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{11}-\widehat{\mathrm{X}}_{11}(\mathrm{C})\right)^2\right)$. Ainsi

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\right|\leqslant\mathrm{K}\cdot\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{11}-\widehat{\mathrm{X}}_{11}(\mathrm{C})\right)^2\right)$$

Par conséquent :

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\mathrm{K}\cdot\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{11}-\widehat{\mathrm{X}}_{11}(\mathrm{C})\right)^2\right)+\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|$$

Soit $\varepsilon>0$. La question Q40 nous fournit C_1 tel que $\forall\mathrm{C}\geqslant\mathrm{C}_1,\ \mathrm{K}\cdot\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{11}-\widehat{\mathrm{X}}_{11}(\mathrm{C})\right)^2\right)\leqslant\varepsilon/2$.

Je fixe désormais $\mathrm{C}=\max(\mathrm{C}_0,\mathrm{C}_1)$. on remarque que $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$, $\forall\omega\in\Omega$, $\left|\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})(\omega)\right|\leqslant\frac{2\mathrm{C}}{\sigma_{ij}(\mathrm{C})}\leqslant 4\mathrm{C}$ car $\sigma_{ij}(\mathrm{C})\geqslant 1/2$.

Ainsi les variables aléatoires $\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})$ ($i\leqslant j$ dans $\mathbb{N}^*$) sont centrées, réduites, uniformément bornées, de même loi et mutuellement indépendantes.
On peut donc appliquer la partie III :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Ce qui nous fournit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant\mathrm{N}$, $\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon/2$

d'où $\forall n\geqslant\mathrm{N}$, $\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon$

On vient de montrer que $\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x}$

IV.C -

Q 43. On considère désormais que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Je note $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Le théorème de Weierstrass nous fournit un polynôme P tel que $\forall x \in [-3,3],\ |f(x) - \mathrm{P}(x)| \leqslant \varepsilon$.

On définit alors la fonction $g : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{P}(x) & \text{si } x \in [-3,3] \\ \mathrm{P}(3) & \text{si } x \geqslant 3 \\ \mathrm{P}(-3) & \text{si } x \leqslant -3 \end{cases}$

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-3,3]$, elle y est à dérivée bornée selon le théorème des bornes atteintes donc lipschitzienne sur $[-3,3]$ d'après les accroissements finis.

Ainsi la fonction g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et on montre facilement qu'elle est bornée.

Je pose $h = f - g$ qui est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ par combinaison linéaire.

Je considère également la fonction $\mathrm{H} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall x \in [-2,2],\ \mathrm{H}(x) = \varepsilon \\ \forall x \in [3,+\infty[\,,\ \mathrm{H}(x) = \sup_{\mathbb{R}} |h| + \varepsilon \\ \forall x \in]-\infty,-3],\ \mathrm{H}(x) = \sup_{\mathbb{R}} |h| + \varepsilon \\ \text{H affine et continue sur } [-3,-2] \text{ et } [2,3] \end{cases}$

On remarque que H est lipschitzienne et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{H} \geqslant |h|$.

Comme toutes les fonctions sont bornées, il en est de même pour les variables aléatoires qui suivent et elles admettent toutes une espérances. On a ainsi

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) + \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)$$

D'après Q42, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} g(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \ \text{ et } \ \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{H}(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

Or $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} g(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$

et $\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{H}(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$ car $m_0 = 1$ de plus

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)\right| \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x\right| \leqslant 4\varepsilon$$

Ce qui permet de conclure que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\text{On a bien montré la loi du demi-cercle dans le cas général}}$$

• • • FIN • • •