EXERCICE

Extrait du CCP 2014 - Maths 2 - Option MP

Soit n un entier supérieur à 2 et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

1. Soit p un projecteur de E.

1.a Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans E.

1.b En déduire que la trace de p (notée $\mathrm{Tr}\,(p)$) est égale au rang de p (noté $\mathrm{rg}\,(p)$).

1.c Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$ est-il nécessairement un projecteur de E ?

2. Donner un exemple de deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que A soit diagonalisable et B ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

3. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

3.a Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que la matrice $Mat_\beta(u)$ de u dans β soit de la forme :

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

3.b Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

3.c On suppose que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

3.d Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

1) a) E de dimension finie.

Pour m.que $E = \ker p \oplus \operatorname{Im}(p)$, il suffit de m.que :

i) $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$

ii) $\dim E = \dim \ker p + \dim \operatorname{Im} p$

→ Pour ii) C'est le théorème du rang

→ Pour i) :

Soit $x \in \ker p \cap \operatorname{Im} p$. M-que $x = 0$

On a $\begin{cases} p(x) = 0 \\ \exists y \in E,\ x = p(y) \end{cases}$

$x = p(y) \Rightarrow \underbrace{p(x)}_{=0} = \underbrace{p^2(y)}_{= p(y) = x}$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$

1) b) $tr(p) \stackrel{?}{=} rg(p)$:

Soit $B = B_1 \sqcup B_2$ une base adaptée à la décomposition : $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

Notons $r = rg(p) \left(= \operatorname{card}(B_2)\right)$

$$\operatorname{mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-r} & 0 \\ \hline 0 & I_r \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{tr(p) = r}$ CQFD

1) c) Posons ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On a $rg(A) = 2 \Rightarrow rg(f) = 2$

et on a $tr(f) = tr(A) = 2$

D'où $rg(f) = tr(f)$.

Mais $f^2 \neq f$ car $A^2 \neq A$

D'où $rg(f) = tr(f)$ mais f n'est pas un projecteur

2) i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $rg(A) = 1$

et A diagonalisable car diagonale

ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 1$.

B n'est pas diagonalisable ; en effet :

On a $Sp(B) = \{0\}$.

Si B était diagonalisable alors B serait semblable à $diag(0,0,0)$; la matrice nulle

$\Rightarrow B = 0$, ce qui est absurde.

D'où B n'est pas diagonalisable

3/a/ On a $rg(u) = 1$ alors $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n-1$ (thm du rang)

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de E (ça existe en vertu du théorème de la base incomplète). Notons-la β.

On a $u(e_1) = \dots = u(e_{n-1}) = 0$.

Posons $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, où les a_i des réels.

Alors :

$$\underset{\beta}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

3/b/ ($\Rightarrow$) Supp. que u diagonalisable.

M. que $tr(u) \neq 0$: càd $a_n \neq 0$:

u diagonalisable $\Rightarrow \underset{\beta}{\mathrm{mat}}(u) = A$ diagonalisable

Si $a_n = 0$, alors $Sp(A) = \{0\}$.

et A diagonalisable $\Rightarrow A$ semblable à 0

$\Rightarrow A = 0$: absurde car $rg(A) = 1$

D'où $a_n \neq 0$

($\Leftarrow$) Supp que $tr(u) \neq 0$.

M. que u diagonalisable :

On a $a_n \neq 0$, alors $Sp(u) = \{0, a_n\}$.

En plus $\begin{cases} \dim E_0(u) = \dim \mathrm{Ker}(u) = n-1 = m(0) \\ \dim E_{a_n}(u) = 1 \text{ ; c'est une valeur propre simple} \end{cases}$

D'où (u diagonalisable)

3/ c/ Supp que $tr(U) = rg(U) = 1$.

M. que U est un projecteur :

Càd M. que $A^2 = A$; où $A = mat_\beta(U)$

On a $tr(U) = a_n = 1$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $A^2 = A$ (juste effectuer vos calculs) $\boxed{}$

3/ d/ i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$; En effet :

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a :

$$\begin{cases} rg(f) = rg(A) = 1 \\ tr(f) = tr(A) = 1 \end{cases}$$

$\overset{3/c}{\Longrightarrow}$ f projecteur !

ii/ $Im(f) = ?$

On a $rg(f) = 1 = \dim(Im(f))$

alors $Im(f) = Vect(f(\varepsilon_1))$; où

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow Im(f) = Vect((1,1,1))$

iii) $Ker(f) = ?$

$(x,y,z) \in Ker(f) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x + y - z = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x,y,x+y)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) \in Vect((1,0,1);(0,1,1))$

Donc $Ker(f) = Vect((1,0,1);(0,1,1))$