ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 :

A) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(E_1): \ 7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1\,;$
2) $(E_2): \ y' + 2xy = 2xe^{-x^2}\,;$
3) $(E_3): \ y' + 2y = x^2 - 2x + 3\,;$
4) $(E_4): \ (x^2+1)y' + xy = 1\,;$
5) $(E_5): \ y' + y = xe^{-x}\,;$
6) $(E_6): \ \sqrt{1+x^2}y' - y = 1\,;$
7) $(E_7): \ y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)\,;$
8) $(E_8): \ (x^2+1)^2y' + 2x(1+x^2)y = 1\,;$

B) Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles spécifiés :

1) $(E_9): \ \sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0;$ (*sur* $]0, \pi[$)
2) $(E_{10}): \ \sinh(x)y' - \cosh(x)y = 1;$ (*sur* $]0, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 0[$)

Exercice 2 :

Déterminer une équation différentielle ayant comme solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

1) Soient $C, D \in \mathbb{R}$.
Considèrons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{x}} & si \quad x \succ 0 \\ De^{\frac{-1}{x}} & si \quad x \prec 0 \end{cases}$$

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f soit prolongeable par continuité en 0.
b) Supposons que cette condition est satisfaite. Notons encore f ce prolongement.
Montrer alors que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2) Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(E) \; : \; x^2y' - y = 0$$

Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3) Résoudre enfin (E) sur $\mathbb{R}$.

Équations différentielles du second ordre

Exercice 4 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(E_1) : \; y'' + 5y' - 6y = e^x$;
2) $(E_2) : \; y'' + 4y' + 13y = e^{-x}$;
3) $(E_3) : \; y'' + y = \cos(2x)$;
4) $(E_4) : \; y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + \sin(x)$;
5) $(E_5) : \; y'' + y = \sin(\omega x)$; (discuter suivant ω).
6) $(E_6) : \; y'' - 2y' + y = x, \; y(0) = y'(0) = 0$;
7) $(E_7) : \; y'' + 9y = x + 1, \; y(0) = 0$;
8) $(E_8) : \; y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;
9) $(E_9) : \; y'' + \beta^2 y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ $(\beta \succ 0)$ fixé ;

Exercice 5 :

Déterminer une équation différentielle ayant pour solutions les fonctions de la forme

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}, \; A, B \in \mathbb{R}$$

Équations différentielles du second ordre à coéfficients variables

Exercice 6 : (Résolution via un changement de variable)

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)y' + y = 0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t = \arctan x$.

2) Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t = \arccos x$.

3) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $x = e^t$.

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''+xy'-4y=0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $x=\sinh(t)$.

Exercice 7 : (Résolution via un changement de fonction)

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_1):\ (1+e^x)y''+y'-e^xy=0$$

Vous pouvez introduire la fonction $z=y'+y$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_1):\ xy''-(1+x)y'+y=1$$

Vous pouvez introduire la fonction $z=y'-y$.

Exercices divers :

Exercice 8 :

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)f(y)$$

Exercice 9 :

Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et vérifiant $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$.
Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

Exercice 10 :

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.
Déterminer toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f(\lambda-x)$$

Exercice 11 :

1) Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$$

2) Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)+f(x)=\int_0^1 f(t)dt$$

Exercice 6 : (Résolution via un changement de variable)

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t=\arctan x$.

2) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$(1-x^2)y''-xy'+4y=\arccos x$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t=\arccos x$.

3) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y''+xy'+y=0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $x=e^t$.

4) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''+xy'-4y=0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $x=\sinh(t)$.

Solution

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t=\arctan x$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On sait d'abord que $\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$t=\arctan(x) \iff x=\tan(t)$$

$$\boxed{y(x)=z(t)}$$

$$y(x)=y(\tan t)=z(t)$$

$$y'(x)=\frac{d}{dx}(z(t))=z'(t)\times\frac{dt}{dx}=z'(t)\times\frac{1}{1+x^2}\quad(\text{car } t=\arctan(x))$$

Composée

$$\boxed{y'(x)=z'(t)\times\frac{1}{1+x^2}}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(y'(x)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(z'(t) \times \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}\left(z'(t)\right)}_{\text{Composée}} \times \frac{1}{1+x^2} + z'(t) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= z''(t) \times \frac{dt}{dx} \times \frac{1}{1+x^2} + z'(t) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$t = \arctan(x)$

$$= z''(t) \times \frac{1}{(1+x^2)^2} - 2x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} z'(t)$$

$$\boxed{y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(z''(t) - 2x\, z'(t)\right)}$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= z(t) \\ y'(x) &= z'(t) \times \frac{1}{1+x^2} \\ y''(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(z''(t) - 2x\, z'(t)\right) \end{aligned}}$$

Alors en remplaçant, on trouve :

$$\boxed{(1+x^2)^2 y''(x) + 2(x-1)(1+x^2) y'(x) + y(x)} = \left(z''(t) - 2x\, z'(t)\right) + 2(x-1)\, z'(t) + z(t)$$

$$\boxed{= z''(t) - 2z'(t) + z(t)}$$

Par suite :

$$\left(y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}\right) \iff \left(\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \underbrace{z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0}_{\text{équa diff facile à résoudre}}\right)$$

$$\iff \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z(t) = (A + Bt)\, e^{t}$$

$$\iff \left(\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = (A + B \arctan(x))\, e^{\arctan x}\right)$$

Car $\boxed{\begin{array}{l} y(x) = z(t) \\ t = \arctan(x) \iff x = \tan(t) \end{array}}$

Conclusion

La solution générale de l'équa diff :

$$\boxed{(1+x^2)^2y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0 \quad ; \ x \in \mathbb{R}}$$

est $y(x) = \left(A + B\arctan(x)\right)e^{\arctan x}$

où $A, B \in \mathbb{R}$

Les autres équations se traitent de manière similaire.

Fin Exercice 6

Exercice 7 : (Résolution via un changement de fonction)

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_1) : \ (1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0$$

Vous pouvez introduire la fonction $z = y' + y$.

Solution

$z = y' + y$

$z' = y'' + y' \implies y'' = z' - y'$

$\boxed{y \text{ sol de } (E_1)} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ \underline{(1+e^x)\, y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0}$

On a : $(1+e^x)\, y''(x) = (1+e^x)\left(z'(x) - y'(x)\right)$

Alors :

$$\underline{(1+e^x)\, y''(x) + y'(x) - e^x y(x)} = (1+e^x) z'(x) - (1+e^x) y'(x) + \cancel{y'}(x) - e^x y(x)$$

$$= (1+e^x) z'(x) - e^x \left(y(x) + y'(x)\right)$$

$$= \underline{(1+e^x) z'(x) - e^x z(x)} \quad (\text{car } z = y' + y)$$

D'où :

$\boxed{y \text{ sol de } (E_1)} \iff \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ (1+e^x)\, z'(x) - e^x z(x) = 0} \quad E'_1$

↳ équa diff plus facile à résoudre

$$\iff \boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x} z(x) = 0} \quad (\forall x\in\mathbb{R},\ 1+e^x \neq 0)$$

$$a(x) = \frac{-e^x}{1+e^x}$$

$$\int a(x)\,dx = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}\,dx = -\ln(1+e^x) + C$$

On prend $A(x) = -\ln(1+e^x)$

La solution générale de l'équa diff E_1' est :

$$z(x) = C\,e^{-A(x)}$$
$$= C\,e^{\ln(1+e^x)}$$

$$\boxed{z(x) = C(1+e^x)}, \text{ où } C\in\mathbb{R}.$$

Ainsi :

y solution de $(E_1) \iff \forall x\in\mathbb{R},\ z'(x) - \frac{e^x}{1+e^x} z(x) = 0$

$$\iff \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ z(x) = c(1+e^x)$$

$$\iff \boxed{\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ y'(x) + y(x) = c(1+e^x)}$$

On résout cette équa diff du 1^{er} ordre (facile), et on trouve $\boxed{y(x) = \ldots}$ qui est la solution générale voulue

Fin Exercice 7