Déf 1

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $[a,b]$ un segment de $[a,b)$.

Soit $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(x)\,dx \right) \cdot e_i$$

Déf 1

Soit $B=(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $[a,b]$ un segment de $[a,b]$.

Soit $f=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ continue par morceaux sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(x)\,dx \right) \cdot e_i$$

$$\int_0^1 (e^t, t^2)\,dt = \; ? \quad \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t & e^t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} dt = \; ? \quad \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\int_0^1 (e^t, t^2)\,dt = \left(\int_0^1 e^t\,dt, \int_0^1 t^2\,dt\right)$$

$$= \left(e-1, \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t & e^t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^1 t\,dt & \int_0^1 e^t\,dt \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & e-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$(n \geq 1)$: $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = ?$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$= \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où : $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln(1+x) \Big]_0^1$$

$$= \ln(2) - \ln(1) = \boxed{\ln(2)}$$

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}\right)$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k^2}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\right)$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+nk^2}\right)$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = ?$$

$$\left(\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt\right)' = ?$$

$$\left(\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt\right)' = ?$$

Soit F une primitive de f (càd $F' = f$)

$$\left(\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt\right)' = \left(F(x^2) - F(2x)\right)'$$

$$= (x^2)' \cdot F'(x^2) - (2x)' F'(2x)$$

$$= 2x\, f(x^2) - 2 f(2x)$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int$$ [redacted] $$f(\varphi(t))\,dt$$

Soient $\begin{cases} \varphi : I \to J \text{ de classe } C^1 \\ f : J \to E \text{ Continue} \end{cases}$

$$\forall \alpha, \beta \in I, \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)\, f(\varphi(t))\,dt$$

$x = \varphi(t)$; $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \to \boxed{dx = \varphi'(t)\,dt}$

$x = \varphi(\alpha) \to \varphi(t) = \varphi(\alpha) \to \boxed{t = \alpha}$

$x = \varphi(\beta) \to \varphi(t) = \varphi(\beta) \to \boxed{t = \beta}$

Remplaçons, on trouve

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \ ?$$

Chang de variable : $\boxed{x = \sin(t)}$

Intégrale de Wallis :

$n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$$

?

Chang de var