

up

$$q \in \mathcal{L}(E).$$

$$q \neq 0 \iff \dots \lambda \in \mathbb{K}, q(\lambda) \dots$$

3:

- espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $f$  un endomorphisme d'indice  $n$ , c.à.d.  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

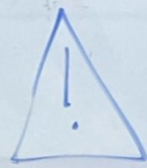
$\Rightarrow$   $E$  tel que  $f^{n-1}(e) \neq 0$ .

$\Rightarrow$  que la famille  $B = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$  est

$\Rightarrow$  matrice de  $f$  dans la base  $B$ .

$g \in \mathcal{L}(E)$

$$g \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in E, g(x) \neq 0$$



plus d'abord  $\Rightarrow$

$$g = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in E, g(x) = 0)$$

$$f^{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow (\exists e \in E, f^{n-1}(e) \neq 0)$$

**Exercice 3 :**

Soit  $E$  un  $K$ - espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent d'indice  $n$ , c.à.d.  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

Soit alors  $e \in E$  tel que  $f^{n-1}(e) \neq 0$ .

- 1) Montrer que la famille  $B = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$  est une base de  $E$ .
- 2) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base  $B$ .

Solution



20

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0$$

$T$  is classe

$$\left( \begin{matrix} f \\ \vdots \\ f^{n-1} \end{matrix} \right) = f^{n-1}(e) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 \underbrace{f^{n-1}(e)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 0}$$

On a  $\lambda_1 f(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0$

On introduit  $f$

$$\Rightarrow \lambda_1 \underbrace{f(e)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

17:50 mer. 11 sept. < Sol Rév Alg Lin Sup

De proche en proche on annulera tous les  $\lambda_k$  restants.

2<sup>ème</sup> manière de faire

$b \neq 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{K}, b \neq 0$

Si on a les  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$  tels que  $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k b^k = 0$  (E2)

Mais  $(\forall k \in \mathbb{K}, \lambda_k = 0)$

Raisonnons par l'absurdité.

Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{K}$  tel que  $\lambda_k \neq 0$

Posons  $i = \min(\{k \in \mathbb{K} / \lambda_k \neq 0\}) = i$

$\lambda_i b^i + \dots = 0$

$\lambda_{i-1} b^{i-1} + \dots = 0$

$\lambda_{i-2} b^{i-2} + \dots = 0$

$\lambda_{i-1} b^{i-1} + \dots = 0$

$\lambda_{i-2} b^{i-2} + \dots = 0$

$\lambda_0 b^0 + \dots + \lambda_{n-1} b^{n-1} = 0$

$b_1 = \min(\{k \in \mathbb{K} / \lambda_k \neq 0\})$

$\lambda_1 b^1 + \dots = 0$

$\lambda_2 b^2 + \dots = 0$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} f(e) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Fin Ex 3

Question : Soit  $S = (f(e), \dots, 1(e), e)$

Écrire de même  $\text{mat}_S(f)$