up

$g \in \mathcal{L}(E)$.

$g \neq 0 \iff$ .... $x \in E$, $g(x)$ - - - -

3 :

espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit f un end

t d'indice n. càd $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

E tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

que la famille $B = (e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e))$ est

matrice de f dans la base B.

$g \in \mathcal{L}(E)$

puis

$\boxed{g \neq 0 \iff \exists x \in E,\ g(x) \neq 0}$

d'abord

$\boxed{g = 0 \iff (\forall x \in E,\ g(x) = 0)}$

[redacted]

$f^{n-1} \neq 0 \iff (\exists e \in E,\ f^{n-1}(e) \neq 0)$

Exercice 3 :

Soit E un K- espace vectoriel de dimension $\boxed{n \geq 2.}$ Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. càd $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Soit alors $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $B = (e, f(e), \ldots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.

2) Ecrire la matrice de f dans la base B.

Solution

$$\lambda_0 e + \lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0$$

f^{n}

Trop classique

$$f^{n-1}(- - - - -) = f^{n-1}(0) =$$

$$\Rightarrow \lambda_0 \underbrace{f^{n-1}(e)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 0} \quad \text{car} - -$$

On a $\lambda_1 f(e) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0$

On introduit f^{n-2}

$$\Rightarrow \lambda_1 \underbrace{f^{n-1}(e)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

17:50 mer. 11 sept.

Sol Rév Alg Lin Sup

De proche en proche on annulera tous les λ_k restants.

2ème manière de faire

$f^{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow \exists e \in E,\ f^{n-1}(e) \neq 0$

Soient alors $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e) = 0$. (Ω)

Mq ($\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = 0$)

Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$

Posons $\min(\{k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \lambda_k \neq 0\}) = i$

$\lambda_i f^i(e) + \dots = 0$

$f^{n-1-i}(\dots) = 0$

$\lambda_i f^{n-1}(e) = 0$, $f^{n-1}(e) \neq 0$

$\lambda_i = 0$ absurde

$\lambda_1 f^1(e) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(e) = 0$

$1 = \min(\{k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \lambda_k \neq 0\})$

$f^{n-2}(\dots) = 0$

alors $\lambda_1 f^{n-1}(e) = 0$, $f^{n-1}(e) \neq 0$

$\lambda_1 = 0$

Sol Rév Alg Lin Sup

$$f^{n-1}(e) \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fin Ex 3

<u>Question</u> : Soit $S = (f^{n-1}(e), \dots, f(e), e)$

Écrire de même $\text{mat}_S(f)$