Correction

d'après ISG 1979

1. $\mathrm{e}^{i\beta}-\mathrm{e}^{i\alpha}=(\mathrm{e}^{i(\beta-\alpha)/2}-\mathrm{e}^{-i(\beta-\alpha)/2})\mathrm{e}^{i(\beta+\alpha)/2}=2i\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\mathrm{e}^{i(\beta+\alpha)/2}$

   donc $d(\mathrm{e}^{i\beta}-\mathrm{e}^{i\alpha})=2\left|\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right|$.

2.a Par hypothèse $\exists(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$.

On a alors $z_{2q}=e^{2ip\pi}=1$. Donc $2q\in A$ et par suite $A\neq\varnothing$.

A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément m.

2.b Supposons $\exists 0\leq k,\ell\leq m$ tels que $z_k=z_\ell$ i.e. $\mathrm{e}^{ik\theta}=\mathrm{e}^{i\ell\theta}$

Quitte à échanger k et ℓ on peut supposer $k\leq\ell$.

On a alors $\mathrm{e}^{in\theta}=1$ avec $n=\ell-k\in\mathbb{N}$.

Or $n<m$ et m est le plus petit élément de A donc $n\notin A$.

Par suite $n=0$ i.e. $k=\ell$.

2.c Puisque $m\in A$ on a $\mathrm{e}^{im\theta}=1$.

Par suite $\forall 0\leq k\leq m-1, z_k^m=\mathrm{e}^{imk\theta}=(\mathrm{e}^{im\theta})^k=1^k=1$ et donc $z_k\in U_m$.

Ainsi $V\subset U_m$.

De plus $\operatorname{Card}V=m=\operatorname{Card}U_m$ donc $V=U_m$.

3. Par l'absurde : Supposons $\exists k,\ell\in\mathbb{Z}$ tels que $z_k=z_\ell$ avec $k\neq\ell$.

Quitte à échanger k et ℓ on peut supposer $k<\ell$.

$z_k=z_\ell$ donne $\mathrm{e}^{ik\theta}=\mathrm{e}^{i\ell\theta}$ d'où $\mathrm{e}^{i(k-\ell)\theta}=1$ puis $(k-\ell)\theta=2m\pi$ avec $m\in\mathbb{Z}$. Par suite $\theta=\dfrac{2m\pi}{k-\ell}$ et donc $\dfrac{\theta}{\pi}\in\mathbb{Q}$. Absurde.

4. $\forall 0\leq k\leq n-1, A_k\neq\varnothing$ car $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\in A_k$.

Il est clair que $\bigcup\limits_{0\leq k\leq n-1}A_k\subset U$.

Inversement, soit $z\in U$ et $\alpha=A\mathrm{rg}(z)\in[0,2\pi[$.

Pour $k=E(\dfrac{n\alpha}{2\pi})\in\{0,\ldots,n-1\}$ on a $\dfrac{2k\pi}{n}\leq\alpha<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}$ et donc $z\in\bigcup\limits_{0\leq k\leq n-1}A_k$. Ainsi $U\subset\bigcup\limits_{0\leq k\leq n-1}A_k$ puis $U=\bigcup\limits_{0\leq k\leq n-1}A_k$.

Soit $k,\ell\in\{0,\ldots,n-1\}$. Si $A_k\cap A_\ell\neq\varnothing$. Soit $z\in A_k\cap A_\ell$ et $\alpha=A\mathrm{rg}(z)$. On a $\dfrac{2k\pi}{n}\leq\alpha<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}$ et $\dfrac{2\ell\pi}{n}\leq\alpha<\dfrac{2(\ell+1)\pi}{n}$ donc

$\dfrac{2k\pi}{n}<\dfrac{2(\ell+1)\pi}{n}$ et $\dfrac{2\ell\pi}{n}<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}$ d'où $k<\ell+1$ et $\ell<k+1$ ce qui donne $k=\ell$. Finalement $(A_k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une partition de U.

4.b Il y a $n+1$ éléments différents dans la liste $z_0,...,z_n$. Ceux-ci sont à repartir parmi les n ensembles $A_0,...,A_{n-1}$. Forcément l'un des ensembles en contient au moins 2 (cette idée est connue sous le nom de principe des tiroirs).

4.c Remarquons $z_q=\mathrm{e}^{iq\theta}=\mathrm{e}^{i(q-p)\theta}.\mathrm{e}^{ip\theta}=z_{q-p}z_p$. On a donc $\arg(z_q)=\arg(z_{q-p})+\arg(z_p)\quad[2\pi]$ d'où $\arg(z_{q-p})=\arg(z_q)-\arg(z_p)=\psi-\varphi\quad[2\pi]$.

Comme de plus $\psi-\varphi\in[0,2\pi[$, on peut affirmer $A\mathrm{rg}(z_{q-p})=\psi-\varphi$.

4.d On a $k(\psi-\varphi)\leq\alpha<(k+1)(\psi-\varphi)$ (en fait $k=E(\dfrac{\alpha}{\psi-\varphi})$).

Remarquons $z_{k(q-p)}=(\mathrm{e}^{i(q-p)\theta})^k=z_{q-p}^k=(\mathrm{e}^{i(\psi-\varphi)})^k=\mathrm{e}^{ik(\psi-\varphi)}$.

$d(Z,z_{k(q-p)})=d(\mathrm{e}^{i\alpha},\mathrm{e}^{ik(\psi-\varphi)})=2\left|\sin\dfrac{k(\psi-\varphi)-\alpha}{2}\right|$.

L'encadrement initial donne : $0\leq\dfrac{k(\psi-\varphi)-\alpha}{2}\leq\dfrac{\psi-\varphi}{2}\leq\dfrac{2\pi}{2n}\leq\dfrac{\pi}{2}$.

$x\mapsto\sin x$ étant croissante sur $[0,\pi/2]$: $0\leq\sin\dfrac{\alpha-k(\psi-\varphi)}{2}\leq\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2}$ qui donne le résultat voulu.

4.e $f:x\mapsto x-\sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x)=1-\cos x\geq 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, or $f(0)=0$, la fonction f est donc positive sur $\mathbb{R}^+$.

$d(Z,z_{k(q-p)})\leq 2\dfrac{\psi-\varphi}{2}=\psi-\varphi\leq\dfrac{2\pi}{n}\leq\varepsilon$!