Mathématiques 2

MP

2019

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures

Calculatrice autorisée

Notations

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \qquad D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n \right\} \qquad \text{et} \qquad D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} D_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$$

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N} \qquad d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))$$

Soit Z une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes et telle que $Z(\Omega)$ soit fini. En notant $\mathfrak{R}(Z)$ et $\mathfrak{I}(Z)$ les parties réelle et imaginaire de Z, on définit l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathfrak{R}(Z)) + \mathrm{i}\,\mathbb{E}(\mathfrak{I}(Z)).$$

Si $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs complexes, mutuellement indépendantes, et telles que $Z_j(\Omega)$ soit fini pour tout j, on admet que

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} Z_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(Z_j).$$

I Fonction caractéristique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geqslant 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}.$$

Pour X variable aléatoire réelle avec $X(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right).$$

On définit également

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul et t un réel.

Q 1. Montrer

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Q 2. En déduire

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}.$$

Q 3. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $\left(\Phi_{X_n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Q 4. Étudier la continuité de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_n}$.

Q 5. Montrer que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Q 6. En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \varphi_n : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{E}(\cos(tX_n)) \end{array} \right.$$

Q 7. La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

II Écriture binaire

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$\Phi_n : \left| \begin{array}{rcl} \{0,1\}^n & \to & [\![0, 2^n - 1]\!] \\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \end{array} \right.$$

Q 8. Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant $\operatorname{Im}\Phi_n \subset [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q 9. Préciser $\operatorname{Im}\Phi_n$ en fonction de A_n.

Q 10. Montrer par récurrence

$$\forall k \in [\![0, 2^n - 1]\!], \qquad k \in \operatorname{Im}\Phi_n.$$

Q 11. En déduire que Φ_n est bijective.

Q 12. Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ puis vérifier $D \subset [0, 1[$.

Q 13. Établir

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \qquad \pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

Q 14. Justifier

$$\forall x \in [0, 1[,\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}.$$

Q 15. Établir

$$\forall (x, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\star, \qquad d_j(x) \in \{0, 1\}.$$

Q 16. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Justifier $x \in D_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Q 17. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'application

$$\Psi_n : \left| \begin{array}{rcl} \{0,1\}^n & \to & D_n \\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \end{array} \right.$$

est bijective.

Q 18. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}.$$

III Développement dyadique, loi et décomposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) \qquad G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x)$$

Q 19. Justifier

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \mathbb{P}(Y_n \in [0,1[) = 1.$$

Q 20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in D_n, \qquad F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}.$$

Q 21. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in D_n, \qquad G_n(x) = x.$$

Q 22. Établir, pour tout entier naturel non nul n, que Y_n suit une loi uniforme sur D_n.

Q 23. Réciproquement, soit n un entier naturel non nul et soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur D_n. Montrer qu'il existe des variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$ mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et telles que

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{2^k}.$$

IV Développement dyadique, étude asymptotique

On conserve les notations introduites dans la partie III.

Q 24. Soit x réel. Établir la monotonie des suites $\big(F_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(G_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$.

Q 25. En déduire la convergence simple des suites de fonctions $(F_n)_{n\geqslant 1}$ et $(G_n)_{n\geqslant 1}$.

Q 26. Montrer

$$\forall x \in D \cup \{1\}, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = x \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} G_n(x) = x.$$

Q 27. Généraliser les résultats obtenus à la question précédente pour tout $x \in [0,1]$.

Q 28. Montrer que pour tout intervalle non vide $I \subset [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = \ell(I) \qquad \text{avec} \qquad \ell(I) = \sup I - \inf I.$$

Q 29. En déduire que, pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite $\big(\mathbb{E}(f(Y_n))\big)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Q 30. À l'aide du résultat précédent, proposer une autre démonstration du résultat obtenu à la question 6.

Q 31. *Une application.* Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ puis déterminer sa valeur.

On pourra considérer $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{E}\left(t^{Y_n}\right)\,\mathrm{d}t$.

V Dénombrabilité

Q 32. L'ensemble D est-il dénombrable ?

Q 33. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.

Q 34. Montrer que l'application $\Phi : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est bijective.

Q 35. Montrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{rcl} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & [0,1] \\ (x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{array} \right.$$

est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

On note $D^\star = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \text{si } \Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^\star \\ \dfrac{\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 1 \\ \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D^\star \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

Q 36. Montrer que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.

Q 37. Conclure que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

• • • FIN • • •