Correction

Partie I

1.a g est $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

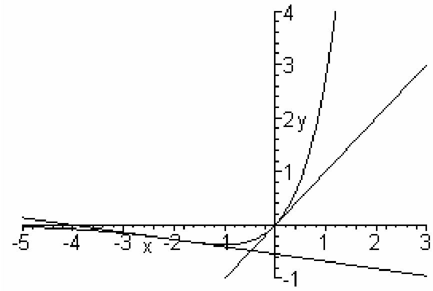
1.b Etude en $-\infty$: $g(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0^-$. L'axe (Ox) est asymptote, courbe en dessous.

Etude en $+\infty$: $g(x)/x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. Branche parabolique verticale.

2.a $g''(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$ du signe de $x+2$.

g est convexe sur $[-2,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,-2]$.

$\mathcal{C}$ présente un point d'inflexion au point d'abscisse -2 .



2.b Equation de la tangente en -2 : $y=g'(-2)(x+2)+g(-2)$

i.e. $y=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}(x+4)$.

Elle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -4 .

2.c Ci-contre

3.a g est continue et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ vers $\left[g(-1),\lim\limits_{+\infty}g\right[=[-1/\mathrm{e},+\infty[$. En symétrisant le tableau de variation de g :

x	-1		$+\infty$
$h(x)$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3.b g est dérivable et $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x\neq 0$ sur $]-1,+\infty[$ donc h est dérivable sur $]-1/\mathrm{e},+\infty[$.

Nous verrons, ci-après, que h n'est pas dérivable en $1/\mathrm{e}$

$h'(x)=\dfrac{1}{g'(h(x))}=\dfrac{1}{(h(x)+1)\mathrm{e}^{h(x)}}$ or $h(x)\mathrm{e}^{h(x)}=x$ donc $h'(x)=\dfrac{h(x)}{x(h(x)+1)}$ pour $x\neq 0$ et $h(0)=1$.

3.c Pour alléger posons $a=1/\mathrm{e}$. On a $h(a)=-1$

Quand $y\to a^+$, $\dfrac{h(y)-h(a)}{y-a}=\dfrac{x+1}{g(x)-g(-1)}$ en posant $x=h(y)\to -1^+$.

Or $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}\to 0^+$ car $g'(-1)=0$ et la stricte croissance de g donne $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}>0$

donc $\dfrac{h(y)-h(a)}{y-a}\to+\infty$. La fonction h présente une tangente verticale en a .

4.a $g(0)=0$ et $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}\geq\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}\in[g(0),g(1/2)]$ et par suite $h(1/2)\in[0,1/2]$.

4.b $\varphi(\alpha)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\alpha}$ or $\alpha\mathrm{e}^{\alpha}=\frac{1}{2}$ donc $\varphi(\alpha)=\alpha\mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}=\alpha$.

φ est dérivable par opérations et $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ donc $|\varphi'(x)|=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\leq\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

4.c La suite (u_n) est bien définie et à valeurs positives car $\forall x\geq 0,\varphi(x)\geq 0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|=|\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|$ donc par l'IAF : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

Par récurrence, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ donc $|u_n-\alpha|\to 0$ puis $u_n\to\alpha$.

4.d $|u_0-\alpha|=|\alpha|\leq 1/2$ donc $|u_n-\alpha|\leq 1/2^{n+1}$.

$\dfrac{1}{2^{n+1}}\leq 5.10^{-3}\Leftrightarrow 2^{n+1}\geq 200\Leftrightarrow n\geq\log_2 100\Leftrightarrow n\geq 7$ .Pour $n=7$, u_7 est une valeur approchée de α à 5.10^{-3} près. A la calculatrice, $u_7=0{,}3519993...$ donc $u_7=0{,}35$ à 5.10^{-3} près. Par suite $\alpha=0{,}35$ à

$5.10^{-3} + 5.10^{-3} = 10^{-2}$ près. Notons que pour $n = 6$, $\alpha = u_6$ à 10^{-2} près mais cela ne permet pas de justifier une valeur décimale adéquate compte tenu de l'addition des erreurs d'approximation.

Partie II

1.a f_λ est $\mathcal{C}^\infty$ et $f_\lambda'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2\lambda x = \mathrm{e}^x(-1 + 2\lambda g(x))$ est du signe de $g(x) - \dfrac{1}{2\lambda}$.

En posant $m_\lambda = h(1/2\lambda)$, on a

x	$-\infty$		m_λ		$+\infty$
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda(m_\lambda)$	$\nearrow$	$+\infty$

.

$f_\lambda(m_\lambda) = \mathrm{e}^{-m_\lambda} + \lambda m_\lambda^2 = 2\lambda m_\lambda + \lambda m_\lambda^2 = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2)$ car $m_\lambda \mathrm{e}^{m_\lambda} = 1/2\lambda$.

1.b Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{f_\lambda(x)}{x} \to +\infty$. Branche parabolique verticale.

Quand $x \to -\infty$, $\dfrac{f_\lambda(x)}{x} \to -\infty$. Branche parabolique verticale.

1.c Ci-contre.

2.a $m_\lambda = h(1/2\lambda)$ est décroissante par composition.

Quand $\lambda \to +\infty$, $1/2\lambda \to 0$ or $h(x) \xrightarrow[x \to 0]{} h(0) = 0$ donc $m_\lambda \to 0$.

Quand $\lambda \to 0^+$, $1/2\lambda \to +\infty$ or $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc $m_\lambda \to +\infty$.

2.b $m_\lambda \mathrm{e}^{m_\lambda} = 1/2\lambda$ donc $2\lambda m_\lambda = \mathrm{e}^{-m_\lambda}$

Quand $\lambda \to +\infty$, $m_\lambda \to 0$, $2\lambda m_\lambda = \mathrm{e}^{-m_\lambda} \to 1$ puis $m_\lambda \sim \dfrac{1}{2\lambda}$.

2.c En passant au logarithme népérien $m_\lambda \mathrm{e}^{m_\lambda} = 1/2\lambda$, on obtient $\ln m_\lambda + m_\lambda = -\ln(2\lambda)$.

Quand $\lambda \to 0^+$, $m_\lambda \to +\infty$ donc $\ln m_\lambda = o(m_\lambda)$ donc $-\ln 2\lambda = m_\lambda + o(m_\lambda) \sim m_\lambda$.

De plus $\ln 2\lambda = \ln 2 + \ln \lambda \sim \ln \lambda$ donc $m_\lambda \sim -\ln \lambda$.

3.a Si $\lambda \le \mu$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-x} + \lambda x^2 \le \mathrm{e}^{-x} + \mu x^2$ donc $f_\lambda(m_\mu) \le f_\mu(m_\mu)$.

De plus, m_λ étant minimum de f_λ, on a $f_\lambda(m_\lambda) \le f_\lambda(m_\mu)$ et donc $\theta(\lambda) \le \theta(\mu)$.

Ainsi θ est croissante.

3.b Quand $\lambda \to +\infty$, $m_\lambda \sim \dfrac{1}{2\lambda}$ donc $\theta(\lambda) \sim \lambda \dfrac{1}{2\lambda}(\dfrac{1}{2\lambda} + 2) \to 1$.

Quand $\lambda \to 0^+$, $m_\lambda \sim -\ln \lambda$ donc $f_\lambda \sim \lambda(\ln \lambda)^2 \to 0$.

3.c $\dfrac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\lambda} = m_\lambda(m_\lambda + 2) \to +\infty$.

La fonction θ n'est pas dérivable en 0 mais y présente une tangente verticale.

3.d Quand $\lambda \to +\infty$, $\theta(\lambda) \to 1^-$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote, courbe en dessous.

En $\lambda = 0$, la courbe est en l'origine avec une tangente verticale.

En $\lambda = 2$, $m_\lambda = h(1) = \alpha$. On a $\theta(1) = \alpha(\alpha + 2)$. Reste à calculer $\theta'(1)$.

$\theta'(\lambda) = (\lambda(m_\lambda^2 + 2m_\lambda))' = m_\lambda^2 + 2m_\lambda + 2\lambda m_\lambda'(m_\lambda + 1)$ avec $m_\lambda' = (h(1/2\lambda))' = -\dfrac{1}{2\lambda^2} h'(1/2\lambda)$ donc

$\theta'(1) = \alpha^2 + 2\alpha - (\alpha + 1)\dfrac{2\alpha}{(\alpha + 1)} = \alpha^2$.