**Mines MP 2013 – Épreuve de Mathématiques 2**

## A. Produit scalaire de matrices

**1°)** La $i$-ième composante d'un vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ dans une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est donnée par $< x \,, e_i >$. En particulier, $< Ae_i \,, e_i >$ représente la $i$-ième composante du vecteur $f(e_i)$ où $f$ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$. Par suite, $\sum\limits_{i=1}^{n} < Ae_i \,, e_i >$ est la somme des éléments diagonaux de la matrice de $f$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, c'est-à-dire la trace de $f$, encore égale à $\operatorname{tr}(A)$ par invariance de la trace par changement de base.

**2°)** – L'application $<,>$ est symétrique car $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}({}^t({}^tAB)) = \operatorname{tr}({}^tBA)$.

– Cette application étant clairement linéaire à droite par linéarité de la trace, elle est bilinéaire.

– Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $< A \,, A > = \sum\limits_{i=1}^{n} < {}^tAAe_i \,, e_i >$ soit $\sum\limits_{i=1}^{n} < Ae_i \,, Ae_i >$, d'où $< A \,, A > = \sum\limits_{i=1}^{n} \| Ae_i \|^2 \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Ae_i = 0$, c'est-à-dire ssi $A$ est nulle.

L'application $<,>$ définit donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**3°)** On rappelle (propriété du cours ou définition selon le point de vue adopté) qu'une matrice symétrique réelle $A$ est positive si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< Ax \,, x > \geqslant 0$.

Toute matrice symétrique réelle étant diagonalisable dans $O_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $B$. En appelant $\mu_i$ la valeur propre de $B$ associée au vecteur $e_i$, il vient :

$$< A \,, B > = \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} < {}^tABe_i \,, e_i > = \sum_{i=1}^{n} \mu_i < Ae_i \,, e_i >,$$

quantité qui est bien positive puisque $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< Ax \,, x > \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i \geqslant 0$.

## B. Décomposition polaire

**4°)** – La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle de manière immédiate. De plus, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a $<{}^tAAx \,, x > = \| Ax \|^2 \geqslant 0$ donc ${}^tAA$ est positive.

– Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$, avec $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés. Alors, pour tout vecteur unitaire $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\| AX \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \| X \|^2 = \lambda_n,$$

d'où $\| A \|_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}$. Par ailleurs, le vecteur unitaire $e_n$ réalise l'égalité $\| Ae_n \| = \sqrt{\lambda_n}$, d'où au final $\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_n}$.

**5°)** $f^* \circ f$ étant autoadjoint positif (puisque sa matrice ${}^tAA$ dans une base orthonormée est symétrique positive), il se diagonalise dans une base orthonormée que l'on notera encore $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. L'endomorphisme défini par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$ est alors autoadjoint positif et, par construction, $f^* \circ f = h^2$.

**6°)** Si $x \in \operatorname{Ker} \tilde{h}$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = h(y)$ et $h(x) = 0$.
Or, par construction de $h$, on a clairement $\operatorname{rg}(h) = \operatorname{rg}(h^2)$ et, comme $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} h^2$, il vient $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} h^2$ d'après le théorème du rang. L'égalité $h^2(y) = 0$ entraîne donc $h(y) = 0$, d'où $x = 0$.
L'endomorphisme $\tilde{h}$ est donc injectif et comme $\operatorname{Im} h$ est un espace vectoriel de dimension finie, $\tilde{h}$ définit bien un automorphisme de $\operatorname{Im} h$.

**7°)** – Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\| f(x) \|^2 = < f^* \circ f(x) \,, x > = < h^2(x) \,, x > = < h^* \circ h(x) \,, x > = \| h(x) \|^2,$$

d'où $\| h(x) \| = \| f(x) \|$.

– Il en ressort en particulier que $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} f$, d'où $\dim \operatorname{Ker} h = \dim \operatorname{Ker} f = \dim(\operatorname{Im} f)^\perp$.

– N'importe quelle application linéaire $v$ envoyant une base orthonormée de $\operatorname{Ker} h$ sur une base orthonormée de $(\operatorname{Im} f)^\perp$ conserve alors la norme donc réalise un isomorphisme de $\operatorname{Ker} h$ sur $(\operatorname{Im} f)^\perp$.

**8°)** – On observe pour commencer que $\operatorname{Ker} h = (\operatorname{Im} h^*)^\perp = (\operatorname{Im} h)^\perp$.

– Les sous-espaces $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$ d'une part, et $\operatorname{Im} f$ et $(\operatorname{Im} f)^\perp$ d'autre part, étant supplémentaires orthogonaux dans $E$, il existe un unique endomorphisme $u$ de $E$ qui coïncide avec $f \circ \tilde{h}^{-1}$ sur $\operatorname{Im} h$ et $v$ sur $\operatorname{Ker} h$.

– De plus, l'application $f \circ \tilde{h}^{-1}$ conserve la norme : en effet, $\forall x \in \operatorname{Im} h$, $\| f \circ \tilde{h}^{-1}(x) \| = \| h \circ \tilde{h}^{-1}(x) \| = \| x \|$. Comme $v$ conserve également la norme des vecteurs de $\operatorname{Ker} h$, le théorème de Pythagore entraîne que $\forall x \in E$, $\| u(x) \| = \| x \|$, ce qui montre que $u$ appartient à $O(E)$.

– Enfin, les endomorphismes $f$ et $u \circ h$ coïncident par construction sur les sous-espaces supplémentaires $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$, donc sont égaux.

**9°)** Il s'agit de l'interprétation matricielle du résultat de la question **8°)** : si $f$ est l'endomorphisme canoniquement associé à $A$, la relation $f = u \circ h$ se traduit matriciellement par $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S$ symétrique positive (puisque la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire usuel).

### C. Projeté sur un convexe compact

**10°)** – L'application $d_x : h \longmapsto \| x - h \|$ est 1-lipschitzienne donc continue de $E$ dans $\mathbb{R}$. Comme $H$ est compact, $d_x$ est bornée et atteint sa borne inférieure sur $H$ d'après le théorème des bornes, d'où l'existence de $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \| x - h_0 \|$.

– Si $h_1 \neq h_0$ est un autre élément de $H$ tel que $d(x,H) = \| x - h_1 \|$, alors d'après le théorème de la médiane,

$$\| x - \frac{1}{2}(h_0 + h_1) \|^2 = \frac{1}{2} \| x - h_0 \|^2 + \frac{1}{2} \| x - h_1 \|^2 - \frac{1}{4} \| h_0 - h_1 \|^2 < \big(d(x,H)\big)^2.$$

Or $\frac{1}{2}(h_0 + h_1) \in H$ vu que $H$ est convexe, ce qui conduit à une contradiction avec la définition de la borne inférieure.

**11°)** – Utilisons cette fois l'indication de l'énoncé. Pour tout $h_1 \in H$ et tout $t \in [0,1]$, on a $th_0 + (1-t)h_1 \in H$ par convexité de $H$, donc $q(t) \geqslant \| x - h_0 \|^2$. En écrivant $q(t)$ sous la forme $\| x - h_0 + (1-t)(h_0 - h_1) \|^2$ et en développant le carré scalaire, il vient alors :

$$\forall t \in [0,1[, \qquad (1-t). < x - h_0 \,,\, h_0 - h_1 > + (1-t)^2 \| h_0 - h_1 \|^2 \geqslant 0.$$

En divisant par $(1-t) > 0$ et en faisant tendre $t$ vers $1$ par valeurs inférieures, on obtient alors $\forall h_1 \in H$, $< x - h_0 \,,\, h_0 - h_1 > \geqslant 0$, ce qui équivaut à la condition demandée.

– Réciproquement, si on a $\forall h_1 \in H$, $< x - h_0 \,,\, h_0 - h_1 > \geqslant 0$, alors $\forall t \in [0,1]$, $q(t) \geqslant \| x - h_0 \|^2$ en remontant les calculs précédents. En particulier, $q(0) \geqslant \| x - h_0 \|^2$, ce qui signifie que $\forall h_1 \in H$, $\| x - h_1 \| \geqslant \| x - h_0 \|$ et $h_0$ est bien (l'unique) point de $H$ tel que $d(x,H) = \| x - h_0 \|$.

*Remarque : cette condition signifie géométriquement que l'angle formé par les vecteurs $x - h_0$ et $h - h_0$ est obtus.*

### D. Théorème de Carathéodory et compacité

**12°)** Soit $CC(H)$ l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de $H$. Toute partie convexe de $E$ qui contient $H$ contenant aussi les combinaisons convexes de leurs éléments, on a déjà l'inclusion immédiate $CC(H) \subset \operatorname{conv}(H)$.

De plus, $H$ est clairement inclus dans $CC(H)$ (tout $x \in H$ s'écrit $x = 1.x$) et $CC(H)$ est convexe. En effet, si $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in CC(H)$ et $y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j y_j \in CC(H)$ (avec $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$, $x_i \in H$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, et de même $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $\mu_j \geqslant 0$, $y_j \in H$ et $\sum_{j=1}^{q} \mu_j = 1$) et si $\alpha \in [0,1]$,

$$\alpha.x + (1-\alpha).y = \sum_{i=1}^{p} \alpha \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{q} (1-\alpha) \mu_j y_j$$

donc $\alpha.x + (1-\alpha).y \in H$ vu que les scalaires $\alpha\lambda_i$ et $(1-\alpha)\mu_j$ sont positifs et que $\sum_{i=1}^{p} \alpha\lambda_i + \sum_{j=1}^{q} (1-\alpha)\mu_j = 1$. $CC(H)$ est donc le plus petit convexe de $E$ contenant $H$, d'où l'égalité $CC(H) = \operatorname{conv}(H)$.

**13°)** La famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$ est liée car de cardinal $p - 1 \geqslant n + 1$ dans un espace vectoriel de dimension $n$. Il existe donc des réels non tous nuls $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_p$ tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i (x_i - x_1) = 0$. En posant $\mu_1 = - \sum_{i=2}^{p} \mu_i$, on a bien trouvé $p$ réels non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

**14°)** Pour un indice $i$ fixé, l'ensemble des réels $\theta$ tels que $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$ est un intervalle fermé contenant $0$, égal à $\mathbb{R}$ si $\mu_i = 0$, borné supérieurement si $\mu_i > 0$ et borné inférieurement si $\mu_i < 0$. Comme l'un au moins des $\mu_i$ est strictement positif et l'un au moins strictement négatif, l'ensemble $\{\theta \in \mathbb{R} \; / \; \forall i \in [\![1, p]\!], \;\; \lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0\}$ est un segment. Choisissons pour $\theta$ l'une de ses bornes : il existe alors un indice $j \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_j - \theta\mu_j = 0$ et, pour tout $i \neq j$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$. De plus,

$$x \; = \; \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) \; = \; 1.$$

Il en ressort que $x$ est combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de $H$. Si ce nombre d'éléments est encore supérieur ou égal à $n+2$, on peut recommencer le raisonnement et, par une itération finie, on se ramène à une combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de $H$.

**15°)** L'ensemble $\Lambda$ est bien un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ : il est en effet fermé (comme intersection de demi-espaces fermés et d'un hyperplan affine) et borné (si $(t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \in \Lambda$, alors $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $0 \leqslant t_i \leqslant 1$).
D'après les questions **12°)** et **14°)**, $\operatorname{conv}(H)$ est précisément l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ points de $H$, donc l'image de $\Lambda \times H^{n+1}$ par l'application

$$\phi : \Big((t_1, t_2, \dots, t_{n+1}), \, (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})\Big) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i.$$

(À noter qu'une combinaison convexe de moins de $n+1$ points s'obtient aussi de la sorte, en prenant certains $t_i$ nuls).
L'application $\phi$ étant continue sur $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ (car par exemple bilinéaire en dimension finie) et $\Lambda \times H^{n+1}$ étant compact en tant que produit de compacts, $\operatorname{conv}(H) = \phi\big(\Lambda \times H^{n+1}\big)$ est donc un compact de $E$.

### E. Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

**16°)** $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \longmapsto {}^tMM$. Il est de plus borné car tout vecteur colonne d'une matrice orthogonale est de norme euclidienne égale à $1$.
$O_n(\mathbb{R})$ est ainsi un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, d'après le résultat de la question **15°)**, son enveloppe convexe $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est donc également un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**17°)** Soit $M$ une matrice de $O_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout vecteur unitaire $X$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\| MX \| = 1$, d'où $\| M \|_2 = 1$. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est donc contenu dans la boule unité $\mathcal{B}$ de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \, \| \, . \, \|_2\;\big)$ et, comme la boule $\mathcal{B}$ est convexe, il vient $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}$.

**18°)** D'après la question **11°)**, le projeté $N$ de $M$ sur $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est caractérisé par

$$\forall V \in \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})), \qquad < M - N \, , \, V - N > \; \leqslant \; 0,$$

ce qui se traduit par l'inégalité $\operatorname{tr}(AV) \leqslant \operatorname{tr}(AM)$. De plus, comme $M \notin \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$,

$$\operatorname{tr}(AN) - \operatorname{tr}(AM) \; = \; < M - N \, , \, N > \; - \; < M - N \, , \, M > \; = \; - \, \| M - N \|_2^2 \; < \; 0.$$

En écrivant $A$ sous la forme $US$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S$ symétrique positive, il vient $\forall V \in \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\operatorname{tr}(USV) < \operatorname{tr}(USM)$. En particulier, pour $V = {}^tU$, on obtient

$$\operatorname{tr}(US\,{}^tU) \; = \; \operatorname{tr}({}^tUUS) \; = \; \operatorname{tr}(S) \; < \; \operatorname{tr}(USM).$$

**19°)** $S$ étant symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de $S$.
En posant $Se_i = \lambda_i e_i$ (avec $\lambda_i \geqslant 0$), l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$< MUSe_i \, , \, e_i > \; = \; \lambda_i < MUe_i \, , \, e_i > \; \leqslant \lambda_i \, \| MUe_i \| \times \| e_i \| \; \leqslant \; \lambda_i \, \| Ue_i \| \times \| e_i \| \; = \; \lambda_i \, \| e_i \|^2 \; = \; \lambda_i.$$

En appliquant la question **1°)**,

$$\operatorname{tr}(MUS) \; = \; \sum_{i=1}^{n} < MUSe_i \, , \, e_i > \; \leqslant \; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; = \; \operatorname{tr}(S).$$

**20°)** Or $\operatorname{tr}(MUS) = \operatorname{tr}(USM)$ : les inégalités des questions **18°)** et **19°)** conduisent alors à $\operatorname{tr}(S) < \operatorname{tr}(S)$.
L'hypothèse $M \notin \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ amenant à une contradiction, on en déduit que $\mathcal{B} \subset \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, d'où finalement $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{B}$ d'après le **16°)**.

**F. Points extrémaux**

**21°)** D'après l'inégalité triangulaire,

$$\| X \| = \| UX \| = \frac{1}{2} \| VX + WX \| \leqslant \frac{1}{2}(\| VX \| + \| WX \|) = \frac{1}{2}(\| X \| + \| X \|) = \| X \| .$$

La norme $\| . \|$ étant euclidienne, les vecteurs $VX$ et $WX$ sont donc colinéaires (et de même sens).

Il en résulte que ${}^tVVX = X$ et ${}^tVWX$ sont colinéaires pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ ce qui entraîne, par un résultat classique que nous admettrons à ce stade du problème, que ${}^tVW$ est une matrice scalaire de la forme $\alpha I_n$. On obtient alors $W = \alpha V$ mais, comme $V$ et $W$ sont orthogonales, on a nécessairement $\alpha = \pm 1$.

Le cas $\alpha = -1$ est impossible (car on aurait $U = 0$). Il reste donc $\alpha = 1$, ce qui conduit à $U = V = W$, c'est-à-dire au fait que $U$ soit extrémal dans $\mathcal{B}$.

**22°)** En utilisant à nouveau la décomposition polaire, $A$ s'écrit sous la forme $US$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S$ symétrique positive.
Or, d'après le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et $D$ diagonale à coefficients diagonaux positifs tels que $S = Q^{-1}DQ$.

On obtient alors $A = (UQ^{-1})DQ$ et il suffit de poser $P = UQ^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

**23°)** – Soit $X = Q^{-1}e_i$, où $e_i$ désigne le $i$-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a alors $\| QX \| = \| X \| = 1$ et comme $A$ appartient à $\mathcal{B}$, il vient $\| AX \| \leqslant 1$.

Or $AX = PDe_i = P(d_i e_i)$ donc, comme $d_i$ est positif, $\| AX \| = d_i \| Pe_i \| = d_i \| e_i \| = d_i$, ce qui conduit à $d_i \leqslant 1$.

– Si tous les coefficients $d_i$ valaient 1, $D$ serait égale à la matrice identité $I_n$, d'où $A = PQ \in O_n(\mathbb{R})$ : impossible. Il existe donc un indice $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $d_j < 1$.

**24°)** Soit $\alpha = 1 - \alpha_j$ avec les notations du **23°)**. Appelons $D_\alpha$, resp. $D_{-\alpha}$, la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les mêmes que ceux de $D$, à l'exception du $j$-ième qui vaut $d_j + \alpha$, resp. $d_j - \alpha$. Posons enfin $A_\alpha = PD_\alpha Q$ et $A_{-\alpha} = PD_{-\alpha}Q$.

Pour tout vecteur unitaire $X$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\| A_\alpha X \| = \| PD_\alpha QX \| = \| D_\alpha QX \| \leqslant \| D_\alpha \|_2 \, . \, \| QX \| = \| D_\alpha \|_2 \, . \, \| X \| = \| D_\alpha \|_2 \, .$$

Or, d'après le **4°)**, $\| D_\alpha \|_2 \leqslant 1$ étant donné que $D_\alpha$ est symétrique positive et que ses valeurs propres sont majorées par 1.
En observant que $\| D_{-\alpha} \|_2 = \| \, |D_{-\alpha}| \, \|_2$, où $|D_{-\alpha}|$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs absolues de ceux de $D_{-\alpha}$, on obtient de même $\| D_{-\alpha} \|_2 \leqslant 1$.

On a ainsi construit deux matrices $A_\alpha$ et $A_{-\alpha}$ de $\mathcal{B}$ telles que $A = \dfrac{1}{2}\big(A_\alpha + A_{-\alpha}\big)$ et $A_\alpha \neq A$ : la matrice $A$ n'est donc pas extrémale.

**Conclusion** : les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont exactement les matrices orthogonales $A \in O_n(\mathbb{R})$.