Nombres réels

Exercice 1 :

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Supposons que $sup(A) > 0$.
Montrer que

$$\exists a \in A,\ a > 0$$

Exercice 2 :

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1) Supposons que A et B sont bornées, et que $A \subset B$. Montrer que
   a) $inf(B) \leq inf(A)$
   b) $sup(A) \leq sup(B)$
2) Supposons que $[\ \forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b\ ]$. Montrer que
   a) sup(A) et inf(B) existent.
   b) $sup(A) \leq inf(B)$
3) Supposons que A et B sont majorées. Montrer que
   a) $sup(A), sup(B)$ et $sup(A \cup B)$ existent.
   b) $sup(A \cup B) = max(sup(A), sup(B))$
4) Supposons que A et B sont majorées.
   Notons $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que
   a) $sup(A + B)$ existe.
   b) $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$

Exercice 3 :

Montrer que

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Exercice 4 :

Déterminer, en justifiant leurs existences, la borne supérieure et la borne inférieure de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad B = \{(-1)^n + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \quad C = \{1 + \tfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 5 :

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

2) En déduire la partie entière $\lfloor S \rfloor$, où $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 6 :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Posons $m = \lfloor nx \rfloor$. Soient $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r \leq n-1$ tels que $m = nq + r$.

1) Montrer que

i) $\begin{cases} 0 \leq k < n-r \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$

ii) $\begin{cases} n-r \leq k \leq n-1 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q+1$

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 7 :

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$

L'objectif est de montrer que $f = id_{\mathbb{R}}$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(-1)$.
2) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = m$
3) Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$
4) a) Montrer que : $\forall \varepsilon \geq 0,\ f(\varepsilon) \geq 0$.
   b) En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$
   b) En déduire que $f = id_{\mathbb{R}}$.
6) Redémontrer que $f = id_{\mathbb{R}}$ en raisonnant par l'absurde et en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.