$\chi_A = (X-i)(X+i)$; $S_p(A) = \{\pm i\}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Diagonalisons A. (réduisons-la)

Càd : $D = ?$ diagonale et P inversible t.que :

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$\hookrightarrow D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ (facile)

$\boxed{P = ?}$ (sera une mat de passage) ; Comment ?

Rappel : $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = P \cdot \underset{S}{\mathrm{mat}}(f) \cdot P^{-1}$; où $P = P_B^S = P_{B,S}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ t.q. $A = \underset{B}{\text{mat}}(f)$

où $B = (e_1, e_2)$ la base canon de $\mathbb{C}^2$

Déterminons $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base

de $\mathbb{C}^2$ t. que $\underset{S}{\text{mat}}(f) = D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Càd : $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = i \cdot \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = -i\, \varepsilon_2 \end{cases}$

a) $\varepsilon_1 = ?$

Soit $\varepsilon_1 = (x, y) \in \mathbb{C}^2$.

$f(\varepsilon_1) = i\, \varepsilon_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = ix \\ -x = iy \end{cases} \Leftrightarrow y = ix$

$\boxed{\varepsilon_1 = (1, i) \text{ convient}}$ $\Leftrightarrow \varepsilon_1 = (x, ix) = x(1, i)$

$P = P_{B,S} = \underset{B}{mat}(S) = \begin{pmatrix} 1 & \\ i & \end{pmatrix}$

$\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon_1} = (1, -i)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

$\boxed{fin}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ⟵ $f(\varepsilon_1) = i\,\varepsilon_1$

passons au conjugué

$\overline{A} = A$, car A réelle

$A \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = (-i) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\varepsilon_2 = (1, -i) = \overline{\varepsilon_1}$