Répartition des puissances d'un complexe de module 1

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1.
On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On note $d(z,z') = |z'-z|$ la distance entre deux complexes z et z'.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on note :

- $\arg(z)$ l'argument du complexe z défini à 2π près.
- $A\mathrm{rg}(z)$ l'unique argument de z qui appartient à $[0,2\pi[$ (appelé argument principal de z).

On se donne $\theta \in [0,2\pi[$, et on considère l'ensemble $V = \{z_n / n \in \mathbb{Z}\}$ avec $z_n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
L'objectif de ce problème est l'étude de cet ensemble V.

1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer $d(\mathrm{e}^{i\alpha}, \mathrm{e}^{i\beta})$.
On exprimera la solution sans radicaux et en fonction de $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$.

2. On suppose $\theta/\pi \in \mathbb{Q}$ et on forme $A = \{n \in \mathbb{N}^* / z_n = 1\}$.

2.a Montrer que A possède un plus petit élément. Notons m celui-ci.

2.b Etablir que les $z_0, ..., z_{m-1}$ sont deux à deux distincts.

2.c Montrer que $V = U_m$.

Dans toute la suite du problème, on suppose $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$.

3. Montrer que les z_n sont deux à deux distincts.

4. Soit $Z \in U$ et $\varepsilon > 0$.
On désire établir l'existence d'un $m \in \mathbb{Z}$ tel que $d(z_m, Z) \le \varepsilon$.
On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ de sorte que $\dfrac{2\pi}{n} \le \varepsilon$.
On introduit, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n-1\}, A_k = \left\{z \in U / k\dfrac{2\pi}{n} \le A\mathrm{rg}(z) < (k+1)\dfrac{2\pi}{n}\right\}$.

4.a Etablir que la famille $(A_k)_{0\le k\le n-1}$ forme une partition de U.

4.b Montrer que parmi les $z_0, \dots, z_n$ deux éléments au moins se trouvent dans un même A_k.

On note p et q leurs indices respectifs et on pose $\varphi = A\mathrm{rg}(z_p)$ et $\psi = A\mathrm{rg}(z_q)$.

Quitte à échanger p et q on peut supposer $\varphi < \psi$ et on a par construction $\psi - \varphi \in]0, 2\pi/n]$.

4.c Etablir $A\mathrm{rg}(z_{q-p}) = \psi - \varphi$.

4.d On note $\alpha = A\mathrm{rg}(Z)$ et on considère k le plus grand entier tel que $k(\psi-\varphi) \le \alpha$.
Montrer que $d(Z, z_{k(q-p)}) \le 2\sin\dfrac{\psi-\varphi}{2}$.

4.e Etablir $\forall x \ge 0, \sin(x) \le x$, et conclure.