Nombres réels

Rationnels et irrationnels

Exercice 1 [02092] [correction]
Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2 [02093] [correction]
Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Exercice 3 [02094] [correction]
Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels $a,b>0$ tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 [02095] [correction]
Soit $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{Q}, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.
b) Calculer $f(0)$.
c) Montrer que $\forall x\in\mathbb{Q}, f(-x)=-f(x)$.
d) Etablir que $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{Q}, f(nx)=nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n\in\mathbb{Z}$.
e) On pose $a=f(1)$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{Q}, f(x)=ax$.

Exercice 5 [02472] [correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}+\left(\frac{2}{3}-\frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 6 [02475] [correction]
Si n est un entier $\geqslant 2$, le rationnel $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ peut-il être entier ?

Exercice 7 [02647] [correction]
a) Montrer l'existence et l'unicité des suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

b) Calculer $a_n^2-2b_n^2$.
c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique $p\in\mathbb{N}^\star$ tel que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{p}+\sqrt{p-1}$$

Exercice 8 [01975] [correction]
[Irrationalité de π]
a) Pour $a,b\in\mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x=0$ des valeurs entières.
b) Etablir la même propriété en $x=a/b$
c) Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose

$$I_n=\int_0^\pi P_n(t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n\to 0$.
d) En supposant $\pi=a/b$, montrer que $I_n\in\mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 9 [03668] [correction]
[Irrationalité de e^r pour $r\in\mathbb{Q}^\star$]
a) Pour $a,b\in\mathbb{N}^\star$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x=0$ des valeurs entières.
b) Etablir la même propriété en $x=a/b$
c) On pose $r=a/b$ et pour $n\in\mathbb{N}^\star$

$$I_n=\int_0^r P_n(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $I_n\to 0$.
d) En supposant $\mathrm{e}^r=p/q$ avec $p,q\in\mathbb{N}^\star$, montrer que $qI_n\in\mathbb{Z}$. Conclure.

Nombres réels

Exercice 10 [02098] [correction]
Soit $a \in [1, +\infty[$. Simplifier

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

Exercice 11 [02099] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\begin{cases} 1) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ 2) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y) \\ 3) & \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \end{cases}$$

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
c) Démontrer que $\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant 0$. En déduire que f est croissante.
d) Conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 [03404] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = 1$.

Inégalités

Exercice 13 [03643] [correction]
Soient $x, y \in [0, 1]$. Montrer

$$x^2 + y^2 - xy \leqslant 1$$

Exercice 14 [02096] [correction]
Montrer

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ ab \leqslant \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

Exercice 15 [02097] [correction]
Montrer

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 16 [03224] [correction]
Montrer

$$\forall u, v \geqslant 0, 1 + \sqrt{uv} \leqslant \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$$

Exercice 17 [03405] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ des réels.
Etablir

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Partie entière

Exercice 18 [02100] [correction]
Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 19 [02101] [correction]
Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 20 [02102] [correction]
Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 21 [02103] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 22 [02104] [correction]
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 23 [02105] [correction]
Soit $a \leqslant b \in \mathbb{R}$. Etablir

$$\mathrm{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

Exercice 24 [02106] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$ tel que

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2 = a_n^2 - 1$$

b) Montrer que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 25 [03416] [correction]
Démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

en notant $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Borne supérieure, borne inférieure

Exercice 26 [02107] [correction]
Soit

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\right\}$$

Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 27 [02109] [correction]
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a, b) \in A \times B,\ a \leqslant b$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 28 [02108] [correction]
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Comparer $\inf A, \sup A, \inf B$ et $\sup B$.

Exercice 29 [02110] [correction]
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Montrer que $\sup A, \sup B$ et $\sup(A \cup B)$ existent et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

Exercice 30 [02111] [correction]
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On forme

$$A + B = \{a + b / (a, b) \in A \times B\}$$

Montrer que $A + B$ est majorée et

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Exercice 31 [02113] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - x)$. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$$

Exercice 32 [00225] [correction]
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose

$$m = \inf A \text{ et } B = A \cap \left]-\infty, m + 1\right]$$

Déterminer la borne inférieure de B.

Exercice 33 [02347] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Etablir

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$$

Exercice 34 [02114] [correction]
Déterminer

$$\inf \left\{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) / x_1, \ldots, x_n > 0\right\}$$

Equations et systèmes

Exercice 35 [02115] [correction]
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $x = 2x - 1 \quad [1]$ b) $3x = 2 - x \quad [\pi]$ c) $nx = 0 \quad [\pi]$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$)

Exercice 36 [02116] [correction]
Observer que

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

est solution d'une équation de la forme $x^3 = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Résoudre cette dernière et déterminer x.

Exercice 37 [02117] [correction]
Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$

Exercice 38 [02118] [correction]
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

Exercice 39 [02119] [correction]
Résoudre le système

$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit x un rationnel et y un irrationnel.
Par l'absurde : Si $z = x + y$ est rationnel alors $y = z - x$ est rationnel par différence de deux nombres rationnels. Or y est irrationnel. Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$ et, quitte à simplifier, p et q non tous les deux pairs.
On a alors $2q^2 = p^2$.
p est alors nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.
Mais alors q est pair. Par suite p et q sont tous les deux pairs.
Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est gagné avec $a = b = \sqrt{2}$. Sinon, on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) La relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.
b) Pour $x = y = 0$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.
c) Pour $y = -x$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ donne $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.
d) Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^-, n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$$

e) On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.

$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$$

or

$$a = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$$

donc

$$f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$$

puis

$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax$$

Exercice 5 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié
`x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);`
Attention à définir les racines cubiques par des exposants 1/3 avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée
`evalf(x);`
Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3
`expand(x^3);`
Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Simplifions ce terme
`simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*`
`(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);`
On obtient

$$\frac{1}{81}\left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Développons selon $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
`(486^2-123^2*15)^(1/3);`
donne 9261. Enfin
`ifactor(9261);`
permet de conclure que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}$$

Ainsi x est solution de l'équation

$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x$$

En factorisant le polynôme sous-jacent
```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```
on obtient

$$(3x-4)(3x^2+4x+3) = 0$$

Puisque $3x^2+4x+3>0$, on peut conclure

$$x = 4/3$$

Exercice 6 : [énoncé]
Le calcul des premiers termes de la suite $(H_n)_{n\geqslant 2}$ permet de conjecturer que H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair. Ceci assurera $H_n \notin \mathbb{Z}$.
Démontrons la propriété conjecturée par récurrence forte.
Pour $n=2$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n-1 \geqslant 2$.
Cas n impair.
On peut écrire $n = 2k+1$ et puisque par hypothèse de récurrence H_{n-1} s'écrit $(2p+1)/2q$, on obtient $H_n = H_{n-1} + 1/n$ égale au rapport d'un entier impair par un entier pair.
Cas n est pair.
On peut écrire $n = 2k$ avec $k \geqslant 2$ puis

$$H_n = \frac{1}{2}H_k + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$$

Par hypothèse de récurrence, H_k est le rapport d'un entier impair par un entier pair, donc $\frac{1}{2}H_k$ aussi.
De plus, comme entrevu dans l'étude du cas précédent, l'ajout de l'inverse d'un entier impair conserve la propriété.
Ainsi H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair.
Récurrence établie.

Exercice 7 : [énoncé]
a) Par la formule du binôme de Newton

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impaires

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

avec les entiers

$$a_n = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} 2^p \text{ et } b_n = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

On peut aussi raisonner par récurrence en mettant à jour une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

L'unicité provient de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. En effet si

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$

avec a, b, a', b' entiers, on obtient

$$(b'-b)\sqrt{2} = a - a'$$

Si $b \neq b'$ alors on peut exprimer $\sqrt{2}$ comme égal à un nombre rationnel. C'est absurde et il reste $b = b'$ et donc $a = a'$.
b) Par la formule du binôme de Newton, on obtient de même

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - \sqrt{2}b_n$$

et alors

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (-1)^n$$

On peut aussi raisonner par récurrence en exploitant l'expression de (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n).
c) L'unicité est évidente compte tenu de la stricte croissance de la fonction $p \mapsto \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$.
Si n est pair alors $a_n^2 = 1 + 2b_n^2$. Pour $p = a_n^2$,

$$(\sqrt{2}+1)^n = a_n + \sqrt{2}b_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Si n est impair alors $2b_n^2 = a_n^2 + 1$. Pour $p = 2b_n^2$,

$$(\sqrt{2}+1)^n = \sqrt{2}b_n + a_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 : [énoncé]

a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leqslant m \leqslant 2n$.
En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}(-a)^{2n-m}b^{m-n}(n+m)! \in \mathbb{Z}$$

b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^{\pi} t^n(bt-a)^n \sin t \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n!}\pi^{n+1}(|b|\,\pi + |a|)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d) Par l'absurde, supposons $\pi = a/b$.
Par intégration par parties successives

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\sin(t+k\pi/2)P_n^{(k-1)}(t)\right]_0^{\pi} + (-1)^m\int_0^{\pi}\sin(t+m\pi/2)P_n^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k-1}\sin(t+k\pi/2)P_n^{(k-1)}(t)\right]_0^{\pi} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k\sin(k\pi/2)(P_n^{(k-1)}(\pi)+P_n^{(k-1)}(0)) \in \mathbb{Z}$$

Comme $I_n \in \mathbb{Z}$ et $I_n \to 0$, la suite (I_n) est stationnaire égale à 0.
Or sur $[0, \pi]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\sin(t)$ est continue, positive sans être nulle et $0 < \pi$ donc $I_n > 0$. Absurde.

Exercice 9 : [énoncé]

a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leqslant m \leqslant 2n$. En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}(-a)^{2n-m}b^{m-n}(n+m)! \in \mathbb{Z}$$

b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^{r} t^n(bt-a)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n!}r^{n+1}(br + a)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d) Par intégration par parties

$$I_n = \left[P_n(t)\mathrm{e}^t\right]_0^r - \int_0^r P_n'(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m P_n^{(m)}(t)\mathrm{e}^t\right]_0^r$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\left(P_n^{(m)}(r)p - P_n^{m}(0)q\right) \in \mathbb{Z}$$

Or sur $[0, r]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\mathrm{e}^t$ est continue, positive sans être nulle et $0 < r$ donc $I_n > 0$.
Ainsi $qI_n \to 0$, $qI_n > 0$ et $qI_n \in \mathbb{Z}$: c'est absurde.
Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de $\ln r$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+\star}\setminus\{1\}$.

Exercice 10 : [énoncé]
Posons
$$x=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$
On a
$$x^2=2a+2\sqrt{a^2-4(a-1)}=2a+2\sqrt{(a-2)^2}$$
Si $a\in[1,2]$ alors $x^2=2a+2(2-a)=4$ donc $x=2$.
Si $a\in[2,+\infty[$ alors $x^2=4(a-1)$ puis $x=2\sqrt{a-1}$.

Exercice 11 : [énoncé]
a) $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ donc $f(0)=0$.
$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(1.x)=f(1)f(x)$$
Comme f est non nulle, on a $f(1)=1$.
$f(1)+f(-1)=f(0)=0$ donc $f(-1)=-1$.
b) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$: $f(n)=n$. De plus
$f(-n)=f((-1)\times n)=f(-1)\times f(n)=-f(n)=-n$ donc
$$\forall x\in\mathbb{Z}, f(x)=x$$
Pour $x\in\mathbb{Q}$, $x=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^\star$,
$$f(x)=f(p\times\frac{1}{q})=f(p)\times f(\frac{1}{q})$$
Or $f(p)=p$ et
$$1=f(1)=f(q\times\frac{1}{q})=f(q)\times f(\frac{1}{q})=q\times f(\frac{1}{q})$$
donc $f(\frac{1}{q})=\frac{1}{q}$. Par suite $f(x)=x$.
c)
$$\forall x\geqslant 0, f(x)=f(\sqrt{x}\sqrt{x})=\left(f(\sqrt{x})\right)^2\geqslant 0$$
Pour $x,y\in\mathbb{R}$, si $x\leqslant y$ alors
$$f(y)=f(x+y-x)=f(x)+f(y-x)\geqslant f(x)$$
Ainsi f est croissante.
d) Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$:
$$\frac{E(nx)}{n}\leqslant x<\frac{E(nx)+1}{n}$$
Comme f est croissante :
$$f(\frac{E(nx)}{n})\leqslant f(x)<f(\frac{E(nx)+1}{n})$$
puis
$$\frac{E(nx)}{n}\leqslant f(x)<\frac{E(nx)+1}{n}$$
A la limite, quand $n\to+\infty$, on obtient $x\leqslant f(x)\leqslant x$ i.e. $f(x)=x$. Finalement $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 : [énoncé]
On a
$$\sum_{k=1}^n(x_k-1)^2=\sum_{k=1}^n x_k^2-2\sum_{k=1}^n x_k+\sum_{k=1}^n 1=0$$
et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient
$$\forall 1\leqslant k\leqslant n, x_k=1$$

Exercice 13 : [énoncé]
Sachant $x^2\leqslant x$ et $y^2\leqslant y$, on a
$$x^2+y^2-xy-1\leqslant x+y-xy-1=(x-1)(1-y)\leqslant 0$$

Exercice 14 : [énoncé]
$(a-b)^2\geqslant 0$ donne $2ab\leqslant a^2+b^2$

Exercice 15 : [énoncé]
Sachant
$$2xy\leqslant x^2+y^2$$
on obtient
$$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2)+\frac{1}{2}(c^2+a^2)=a^2+b^2+c^2$$

Exercice 16 : [énoncé]
Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir

$$\left(1+\sqrt{uv}\right)^2 \leqslant (1+u)(1+v)$$

soit encore

$$2\sqrt{uv} \leqslant u+v$$

ce qui découle de la propriété

$$\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2 \geqslant 0$$

Exercice 17 : [énoncé]
Par somme de quantités positives, on a

$$\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}(a_k-a_\ell)(b_k-b_\ell)=\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}(a_kb_k-a_\ell b_k-a_kb_\ell+a_\ell b_\ell)\geqslant 0$$

En séparant la somme en quatre, on obtient

$$n\sum_{k=1}^n a_kb_k-2\sum_{k=1}^n a_k\sum_{\ell=1}^n b_\ell+n\sum_{\ell=1}^n a_\ell b_\ell\geqslant 0$$

et on en déduit

$$n\sum_{k=1}^n a_kb_k\geqslant\sum_{k=1}^n a_k\sum_{k=1}^n b_k$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

Exercice 18 : [énoncé]
Soit $x\leqslant y\in\mathbb{R}$. $\lfloor x\rfloor\leqslant x$ donc $\lfloor x\rfloor\leqslant y$ or $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ donc $\lfloor x\rfloor\leqslant\lfloor y\rfloor$ car $\lfloor y\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à y.

Exercice 19 : [énoncé]
Puisque $\lfloor x\rfloor\leqslant x$ et $\lfloor y\rfloor\leqslant y$, on a

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant x+y$$

Par définition, $\lfloor x+y\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, on a donc déjà

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor$$

D'autre part $x<\lfloor x\rfloor+1$ et $y<\lfloor y\rfloor+1$ donc

$$x+y<\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2$$

puis

$$\lfloor x+y\rfloor<\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2$$

Puisque cette inégalité concerne des entiers, on peut transformer cette inégalité stricte en l'inégalité large suivante

$$\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

Exercice 20 : [énoncé]
Si $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1/2$ et $\lfloor y\rfloor\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1/2$ alors

$$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor,\ \lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor \text{ et } \lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor$$

puis relation voulue.
Si $\lfloor x\rfloor+1/2\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$ et $\lfloor y\rfloor\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1/2$ alors

$$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1,\ \lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor+1 \text{ et } \lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor$$

puis la relation voulue
Si $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1/2$ et $\lfloor y\rfloor+1/2\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1$: analogue
Si $\lfloor x\rfloor+1/2\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$ et $\lfloor y\rfloor+1/2\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1$ alors

$$\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+2,\ \lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor+1 \text{ et } \lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor+1$$

puis la relation voulue.
Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

Exercice 21 : [énoncé]
On a $\lfloor nx\rfloor\leqslant nx$ puis $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\leqslant x$, or $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ est croissante donc

$$\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor$$

$\lfloor x\rfloor\leqslant x$ donc $n\lfloor x\rfloor\leqslant nx$ puis $n\lfloor x\rfloor\leqslant\lfloor nx\rfloor$ car $n\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$.
Par suite

$$\lfloor x\rfloor\leqslant\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$$

puis

$$\lfloor x\rfloor\leqslant\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor$$

et finalement

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

Exercice 22 : [énoncé]
Posons $m = \lfloor nx \rfloor$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m = nq + r$ avec $0 \leqslant r \leqslant n-1$.
On a $nq + r \leqslant nx < nq + r + 1$ donc pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$q + \frac{k+r}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}$$

Si $k + r < n$ alors $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = q$ et si $k + r \geqslant n$ alors $\left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = q + 1$.
Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = nq + r = m = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 23 : [énoncé]
Si $a \notin \mathbb{Z}$ alors $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor a \rfloor + 2, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ donc

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$$

Or

$$\lfloor 1 - a \rfloor = 1 + \lfloor -a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$$

car $a \notin \mathbb{Z}$ donc

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a+1, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ donc

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - a + 1 = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

car $1 - a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 24 : [énoncé]
a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$, $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1$$

Récurrence établie.
b) $a_n - 1 \leqslant b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \leqslant (2 + \sqrt{3})^n < 2a_n$ donc

$$\left\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$$

C'est un entier impair.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit p un entier strictement supérieur à $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. On a

$$2n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n} < p^2$$

donc

$$4(n^2 + n) < \left(p^2 - (2n+1)\right)^2$$

Puisque les nombres comparés sont des entiers, on a aussi

$$4(n^2 + n) + 1 \leqslant \left(p^2 - (2n+1)\right)^2$$

c'est-à-dire

$$(2n+1)^2 \leqslant \left(p^2 - (2n+1)\right)^2$$

et on en déduit

$$4n + 2 \leqslant p^2$$

Or le carré d'un entier ne peut qu'être congru à 0 ou 1 modulo 4. On en déduit

$$4n + 2 < p^2$$

et donc

$$\sqrt{4n+2} < p$$

Ainsi, il n'existe pas d'entiers compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$ donc

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$$

Exercice 26 : [énoncé]
$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leqslant 2$ donc A est bornée.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée donc $\inf A$ et $\sup A$ existent.

n	0	1	2	3	...
$(-1)^n + \frac{1}{n+1}$	2	$-1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{3}$	$-1+\frac{1}{4}$	...

2 est plus grand élément de A et donc $\sup A = \max A = 2$.
A est clairement minorée par -1 et $(-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \to -1$ donc il existe une suite d'éléments de A qui converge vers -1 donc $\inf A = -1$.

Exercice 27 : [énoncé]
Soit $b \in B$. Puisque

$$\forall a \in A,\ a \leqslant b$$

la partie A est majorée par b.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par b donc $\sup A$ existe et $\sup A \leqslant b$.
B est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $\sup A$ donc $\inf B$ existe et $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 28 : [énoncé]
A et B sont des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ donc les bornes sup et inf considérées existent.
Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $a \leqslant \sup B$. $\sup B$ majore A donc $\sup A \leqslant \sup B$.
Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $\inf B \leqslant a$. $\inf B$ minore A donc $\inf B \leqslant \inf A$.
Enfin, puisque $A \neq \emptyset$, $\inf A \leqslant \sup A$.

Exercice 29 : [énoncé]
$A, B, A \cup B$ sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées donc $\sup A, \sup B, \sup(A \cup B)$ existent dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in A \cup B$ on a $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$ donc

$$\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$$

Puisque $A, B \subset A \cup B$ on a $\sup A, \sup B \leqslant \sup(A \cup B)$ donc

$$\max(\sup A, \sup B) \leqslant \sup(A \cup B)$$

puis l'égalité.

Exercice 30 : [énoncé]
A et B sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ et $\sup B$ existent.
Pour tout $x \in A + B$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
On a $x = a + b \leqslant \sup A + \sup B$, donc $A + B$ est majorée par $\sup A + \sup B$
$A + B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc $\sup A + B$ existe et

$$\sup A + B \leqslant \sup A + \sup B$$

Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, $a = (a + b) - b \leqslant \sup(A + B) - b$ donc A est majorée par $\sup(A + B) - b$ d'où

$$\sup A \leqslant \sup(A + B) - b$$

Par suite

$$b \leqslant \sup(A + B) - \sup A$$

et B est donc majoré par $\sup(A + B) - \sup A$ et par suite

$$\sup B \leqslant \sup(A + B) - \sup A$$

Finalement

$$\sup A + \sup B \leqslant \sup A + B$$

puis l'égalité.

Exercice 31 : [énoncé]
La fonction f_n est dérivable avec

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1 - x) - x^n = nx^{n-1} - (n + 1)x^n$$

On en déduit les variations

x	0		x_n		1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

avec $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0, 1]$ et

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0$$

Exercice 32 : [énoncé]
Puisque $m+1$ ne minore pas A, la partie B est non vide.
De plus $B \subset A$ donc la borne inférieure de B existe et

$$\inf A \leqslant \inf B$$

Soit $x \in A$, si $x \leqslant m+1$ alors $x \in B$ et donc $x \geqslant \inf B$.
Si $x > m+1$ alors à nouveau $x \geqslant \inf B$.
Ainsi $\inf B$ minore A et donc

$$\inf A \geqslant \inf B$$

Finalement

$$\inf A = \inf B$$

Exercice 33 : [énoncé]
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leqslant f(x,y_0)$$

donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y_0)$$

puis

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \inf_{y_0\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y_0)$$

Exercice 34 : [énoncé]
On exploite

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} \geqslant 2$$

pour obtenir

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \geqslant n^2$$

Puisque que pour $x_1 = \ldots = x_n = 1$ on obtient

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = n^2$$

on peut conclure

$$\inf\left\{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) / x_1, \ldots, x_n > 0\right\} = n^2$$

Exercice 35 : [énoncé]
a) $x = 2x - 1 \quad [1] \Leftrightarrow -x = -1 \quad [1] \Leftrightarrow x = 1 \quad [1]$, $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$.
b) $3x = 2 - x \quad [\pi] \Leftrightarrow 4x = 2 \quad [\pi] \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi+2}{4} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
c) $nx = 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{n}\right]$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi}{n} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 36 : [énoncé]
On remarque

$$x^3 = 6x + 40$$

4 est solution apparente de cette équation.

$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10)$$

Les solutions de l'équation sont $4, -2 + i\sqrt{6}, -2 - i\sqrt{6}$. Le nombre x correspond à la seule solution réelle donc $x = 4$.

Exercice 37 : [énoncé]
a) Si (x,y) est solution alors $(2) \Rightarrow x(x+y) = 0$ donc $x = 0$ ou $y = -x$.
Si $x = 0$ alors (1) donne $y = \pm 1/\sqrt{2}$.
Si $y = -x$ alors (1) donne $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
Inversement : ok
Finalement : $\mathcal{S} = \left\{(0, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\right\}$.
b) Si (x,y) est solution alors $(1) - (2)$ donne $(x-y)^2 = 0$ d'où $x = y$ puis (1) donne $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \left\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\right\}$.
c) Si (x,y) est solution alors (1) et (2) donnent $x^4 = x$ d'où $x = 0$ ou $x = 1$.
Si $x = 0$ alors $y = 0$. Si $x = 1$ alors $y = 1$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(0,0), (1,1)\}$.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Si (x,y,z) est solution alors (3) donne $x = 0, y = 0$ ou $z = 0$.
Si $x = 0$ alors $y = 3, z = 5$. Si $y = 0$ alors $x = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}$. Si $z = 0$ alors $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \left\{(0,3,5), (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)\right\}$.
b) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)\right\}$.
c) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$.

Exercice 39 : [énoncé]
On a

$$\begin{cases} x-ay+z=2 \\ x+(a+1)z=3 \\ x+ay+3z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-ay+z=2 \\ ay+az=1 \\ ay+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-ay+z=2 \\ ay+az=1 \\ (1-a)z=0 \end{cases}$$

Si $a=1$ alors le système a pour solution les triplets

$$(3-2z,1-z,z) \text{ avec } z\in\mathbb{R}$$

Si $a\neq 1$ alors le système équivaut à

$$\begin{cases} x-ay=2 \\ ay=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Si $a=0$, il n'y a pas de solutions.
Si $a\neq 0,1$ alors le système possède pour solution l'unique le triplet

$$(3,1/a,0)$$