Petites Mines 1996

PROBLÈME

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 u_2 \cdots u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie *non nulle*. Sinon, on dit que le produit (p_n) diverge.

Première partie

1. En considérant le quotient p_{n+1}/p_n montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.
2. Soit
$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$
Montrer que
$$\forall n \geqslant 1 \quad p_n = n + 1$$
Quelle est la nature du produit (p_n) ?
3. Soient un réel a différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et
$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos \frac{a}{2^p}$$
Pour tout entier naturel n non nul, calculer $p_n \sin(a/2^n)$ en déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

Deuxième partie

1. Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.
   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que :
   $$\forall n \geqslant n_0 \quad u_n > 0$$
   (b) On pose
   $$S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln u_p$$
   Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n). Lorsque (S_n) converge vers l donner la limite de la suite (p_n) en fonction de l.

2. Soit $\quad p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p} \quad$ et $\quad S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p}$

   (a) Montrer que $\qquad \forall p \geqslant 3 \quad \int_p^{p+1} \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln p}{p}$

   (b) En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

Troisième partie

1. Soit $\quad p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$

   où (v_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. On pose

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$$

   (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(1+x) < x$$

   (b) Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

   (c) Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge.

2. Déduire de la question 2 (de la partie I) la limite de la suite (S'_n) définie par

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

3. Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + a^{2^p}\right)$$

   où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Que dire de la nature du produit (p_n) lorsque $a \geqslant 1$?

   (b) On suppose $a \in \left]0, 1\right[$

      i. Montrer que le produit (p_n) converge.

      ii. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $\left(1 - a^2\right) p_n$ et en déduire la limite de la suite (p_n).