Séries numériques et Intégrales

Exercice (Extrait de : Mines-Ponts 2020)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2) Déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\,\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

3) i) Si α est un élément de $]0,1[$, montrer , par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

ii) Si α est un élément de $]1,+\infty[$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4) Pour $x \in [2,+\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$$

i) Justifier, pour $x \in [2,+\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$$

ii) Etablir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(I(x)\right)$$

iii) En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on admet que

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!}$$

Justifier la formule :

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$