Matrices et Applications Linéaires

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases canoniques :

1) $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x+y, x) \end{array} \right.$

2) $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & (X+1)P - X^2P' \end{array} \right.$

3) $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(1), P''(2)) \end{array} \right.$

Exercice 2

Considérons l'application f définie par $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z,y,x) \end{array} \right.$.

B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B = (u_1, u_2, u_3)$, où $\left\{ \begin{array}{lll} u_1 & = & (1,0,1) \\ u_2 & = & (0,1,0) \\ u_3 & = & (1,0,-1) \end{array} \right.$.

1) Déterminer la matrice de f dans la base B_c.

2) i) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

   ii) Déterminer la matrice de f dans la base B.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Justifier que f est une symétrie.

2) Déterminer ses éléments caractéristiques ; base et direction.

Exercice 4

Considérons la famille $S = (cos, sin, exp)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
Notons $E = vect(cos, sin, exp)$.

1) Montrer que S est une base de l'espace E.

2) Considérons l'application φ définie sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ par $\varphi : f \mapsto f'$.

   i) Montrer que φ définit un endomorphisme de E.

   ii) Déterminer la matrice de φ dans la base S.

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \succeq 1$ et f un endomrphisme de E nilpotent d'indice n.

1) Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), ..., f(x_0), x_0)$

Exercice 6

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Considérons la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $\begin{cases} u_1 & = & (1, 1 - 1) \\ u_2 & = & (0, 1, 1) \\ u_3 & = & (1, 2, 1) \end{cases}$

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
3) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Que vaut $mat_{B_c}(f^n)$? où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 & = & (1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 & = & (1, -1, 0) \\ \varepsilon_3 & = & (1, 0, 1) \end{cases}$.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A comme matrice dans la base B.

1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Chercher la matrice de f dans la base S.
3) Déterminer ker(f) et Im(f) ; expliciter pour chacun une base.

Exercice 8

Posons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = diag(0, 1, 2)$.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base.

Soit $f \in L(E)$ tel que $mat_B(f) = A$.

1) Déterminer une base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que $mat_S(f) = D$.
2) Déterminer la matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
3) Calculer P^{-1}.
4) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) On considère maintenant les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 1, y_0 = -1, z_n = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Notons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   i) Ecrire un programme Python permettant de calculer x_n, y_n et z_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   ii) Justifer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$
   iii) En déduire le terme général de chacune des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   iv) Vérifier que la valeur de x_{19} donnée via ce programme Python coincide avec celle donnée par le terme général ainsi trouvé.

Exercice 9

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Etablir que $\mathbb{R}^3 = Ker(u) \oplus Im(u)$.
2) L'endomorphisme u est-il un projecteur ?
3) Déterminer toutes les puissances de A.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1) Justifier que f est une symétrie.

2) Déterminer ses éléments caractéristiques ; base et direction.

Solution

1) Il s'agit de vérifier que $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$.

On a $A = \underset{B_c}{mat}(f)$; où B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors il suffit de vérifier que $A^2 = I_3$.

« On fait les calculs et c'est tout »

2) i) Déterminons la base F de la symétrie f :

Rappel

$F = \ker(f - id)$ la base de la symétrie f.

$G = \ker(f + id)$ la direction de f.

Trouvons $F = \text{Vect}(\ ??\ )$:

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$(x,y,z) \in F \iff (f - id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \underset{B_c}{mat}(f)$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x-2y-z \\ 0 \\ -x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow -x-2y-z=0$$

$$\Longleftrightarrow x=-2y-z$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z)=(-2y-z,y,z)$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z)=y(-2,1,0)+z(-1,0,1)$$

$$(x,y,z)\in F \Longleftrightarrow (x,y,z)\in \operatorname{vect}\big((-2,1,0);(-1,0,1)\big)$$

D'où : $F=\operatorname{vect}\big((-2,1,0);(-1,0,1)\big)$

---

2) ii) Déterminons la direction G de la symétrie s :

On procède comme en 2) i), on trouve :

$$G=\operatorname{vect}\big((1,0,1)\big)$$

$\boxed{\text{Fin Exercice 3}}$

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \succeq 1$ et f un endomrphisme de E nilpotent d'indice n.

1) Montrer l'existence de $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
2) Déterminer la matrice de f dans cette base.
3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), ..., f(x_0), x_0)$

Solution

1) Très classique comme question.
Vue et solutionnée dans : « Espaces vectoriels de dimensions finies »

$\boxed{\text{Exercice 8.}}$

2) Déterminer la matrice de f dans cette base.

Notons $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

On veut $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$.

Autrement dit, il s'agit de remplir la matrice :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f^{n-2}(x_0) \\ f^{n-1}(x_0) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(x_0) & f(f(x_0)) & \cdots & f(f^{n-2}(x_0)) & f(f^{n-1}(x_0)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) Déterminer la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x_0), ..., f(x_0), x_0)$

Notons $S = (f^{n-1}(x_0), f^{n-2}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$.

On veut $\underset{S}{\mathrm{mat}}(f)$.

Autrement dit, il s'agit de remplir la matrice :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c|ccccc} & f(f^{n-1}(x_0)) & f(f^{n-2}(x_0)) & \cdots & f(f(x_0)) & f(x_0) \\ \hline f^{n-1}(x_0) & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ f^{n-2}(x_0) & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ f(x_0) & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}$$

Fin Exercice 5

Exercice 6

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

Considérons la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ où $\begin{cases} u_1 &= (1, 1-1) \\ u_2 &= (0,1,1) \\ u_3 &= (1,2,1) \end{cases}$

1) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice de f dans cette base.

3) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Que vaut $mat_{B_c}(f^n)$? où $n \in \mathbb{N}$.

Solution

1) OK

2) $\underset{B}{mat}(f) = (\ ? \ )$

On a $B = (U_1, U_2, U_3)$.

On veut remplir la matrice $\underset{B}{mat}(f) = \begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(U_1) & f(U_2) & f(U_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$

$f(U_1) = ?$

Notons B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a $\underset{B}{mat}(f) = A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$\underset{B_c}{mat}(f(U_1)) = \underset{B_c}{mat}(f) \times \underset{B_c}{mat}(U_1) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'où $\boxed{f(U_1) = (1, 1, -1)}$

$\Longrightarrow$ $f(U_1) = U_1$

$\begin{cases} u_1 &= (1, 1-1) \\ u_2 &= (0,1,1) \\ u_3 &= (1,2,1) \end{cases}$

$f(u_2) = ?$

$$\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f(u_2)) = \underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{B_c}{\mathrm{mat}}(u_2) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{f(u_2) = (0, 2, 2)}$

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1 - 1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $f(u_2) = 2u_2$

$f(u_3) = ?$

$$\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f(u_3)) = \underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{B_c}{\mathrm{mat}}(u_3) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -15 & 9 & -7 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{f(u_3) = (-2, -4, -2)}$

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1 - 1) \\ u_2 = (0, 1, 1) \\ u_3 = (1, 2, 1) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $f(u_3) = -2u_3$

Enfin, avec $\begin{cases} f(u_1) = u_1 \\ f(u_2) = 2u_2 \\ f(u_3) = -2u_3 \end{cases}$, on tire que :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{diag}(1, 2, -2)$$

3) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La question est très classique. Voyons comment :

On a : $\left| \begin{array}{l} \underset{\mathcal{B}_C}{\mathrm{mat}}(f) = A \\ \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) = D = \mathrm{diag}(1, 2, -2) \end{array} \right.$

Et on sait d'après formule de changement de base que :

$$\underset{\mathcal{B}_C}{\mathrm{mat}}(f) = P_{\mathcal{B}_C, \mathcal{B}} \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_C}$$

D'où $\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$, où $P = P_{\mathcal{B}_C, \mathcal{B}}$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}}$$

Or $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ diagonale.

Alors $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$

$$P = P_{\mathcal{B}_C, \mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}_C}{\mathrm{mat}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 & = & (1, 1-1) \\ u_2 & = & (0, 1, 1) \\ u_3 & = & (1, 2, 1) \end{cases}$$

Reste à calculer P^{-1}.

Inversons P avec la méthode de Gauss-Jordan :

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}}^{P}\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad \begin{array}{l}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1\end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix}\quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

↳ On passe à annuler sa partie supérieure

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{C'est } I_3}\underbrace{\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}}_{\text{C'est donc } P^{-1}}\quad \begin{array}{l}L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3\end{array}$$

D'où
$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&(-2)^n\\1&2^n&2.(-2)^n\\-1&2^n&(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\begin{pmatrix} -1+2.(-2)^n & 1-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ -1-3.2^n+4.(-2)^n & 1+2.2^n-2.(-2)^n & -1-2^n+2.(-2)^n \\ 1-3.2^n+2.(-2)^n & -1+2.2^n-(-2)^n & 1-2^n+(-2)^n \end{pmatrix}$$

4) Que vaut $mat_{B_c}(f^n)$? où $n\in\mathbb{N}$.

On a :

$$\underset{B_c}{mat}(f^n)=\left(\underset{B_c}{mat}(f)\right)^n$$

$$=A^n$$

$$=\begin{pmatrix} -1+2.(-2)^n & 1-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ -1-3.2^n+4.(-2)^n & 1+2.2^n-2.(-2)^n & -1-2^n+2.(-2)^n \\ 1-3.2^n+2.(-2)^n & -1+2.2^n-(-2)^n & 1-2^n+(-2)^n \end{pmatrix}$$

Fin Exercice 6

Exercice 7

Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 &= (1,1,1) \\ \varepsilon_2 &= (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 &= (1,0,1) \end{cases}$.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A comme matrice dans la base B.

1) Montrer que S est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Chercher la matrice de f dans la base S.

3) Déterminer ker(f) et Im(f) ; expliciter pour chacun une base.

Solution :

1) OK

2) On veut remplir $\underset{S}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \\ \begin{array}{c}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \end{array}$

$f(\varepsilon_1) = ?$

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f(\varepsilon_1)) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{B}{\mathrm{mat}}(\varepsilon_1)$$

$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 &= (1,1,1) \\ \varepsilon_2 &= (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 &= (1,0,1) \end{cases}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où $f(\varepsilon_1) = (1,1,1) = \varepsilon_1$

$f(\varepsilon_2) = ?$

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f(\varepsilon_2)) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{B}{\mathrm{mat}}(\varepsilon_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 &= (1,1,1) \\ \varepsilon_2 &= (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 &= (1,0,1) \end{cases}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $f(\varepsilon_2) = (2,-2,0) = 2\,\varepsilon_2$

$f(\varepsilon_3) = ?$

$$\underset{B}{\text{mat}}(f(\varepsilon_3)) = \underset{B}{\text{mat}}(f) \times \underset{B}{\text{mat}}(\varepsilon_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\begin{cases} \varepsilon_1 &= (1,1,1) \\ \varepsilon_2 &= (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 &= (1,0,1) \end{cases}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $f(\varepsilon_3) = (0,0,0) = 0$

Avec $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = 2\,\varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = 0 \end{cases}$ on obtient $\boxed{\underset{S}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

3) Déterminer ker(f) et Im(f) ; expliciter pour chacun une base.

On a : $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \ B \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3 \\ \underset{S}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1,1,1) \\ \varepsilon_2 = (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 = (1,0,1) \end{cases} \\ \underset{B}{\text{mat}}(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

i) $\ker(f) = ?$

Soit $X = x\,\varepsilon_1 + y\,\varepsilon_2 + z\,\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(f) &\iff f(X) = 0 \\
&\iff \underset{S}{\mathrm{mat}}(f) \times \underset{S}{\mathrm{mat}}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff X = z\,\varepsilon_3 \\
&\iff X \in \mathrm{vect}(\varepsilon_3)
\end{aligned}$$

Ainsi $X \in \ker(f) \iff X \in \mathrm{vect}(\varepsilon_3)$

D'où

$\ker(f) = \mathrm{vect}(\varepsilon_3)$
(ε_3) est une base de $\ker(f)$

NB : On peut travailler avec $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = A$ ... mais avec $\underset{S}{\mathrm{mat}}(f)$ qui diagonale, c'est plus rapide comme vous avez noté.

ii) $\mathrm{Im}(f) = ?$

D'abord, d'après le théorème du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{=1} + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

↳ d'après i)

D'où $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2}$

Déterminons maintenant une base de $\mathrm{Im}(f)$:

Il suffit alors de déterminer une famille de 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ qui sont linéairement indépendants, du fait que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

On a : $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(e_1) = (3,-1,1) \in \mathrm{Im}(f) \\ f(e_2) = (1,1,1) \in \mathrm{Im}(f) \end{cases} ; \text{ où } B = (e_1, e_2, e_3).$$

et vu que $(3,-1,1)$ et $(1,1,1)$ sont linéairement indépendants puisque non colinéaires (clair)

D'où

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\big((3,-1,1) ; (1,1,1)\big)}$$

$$\boxed{\big((3,-1,1) ; (1,1,1)\big) \text{ en est une base}}$$

Fin

Remarque

On peut considérer :

$$\underset{S}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 & = & (1,1,1) \\ \varepsilon_2 & = & (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 & = & (1,0,1) \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{\begin{array}{l} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \in \mathrm{Im}(f) \\ f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \in \mathrm{Im}(f) \end{array}}$

D'où

> $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille de $\mathrm{Im}(f)$
> Elle est libre comme sous-famille de S qui est libre.

D'où $\boxed{Im(f) = vect\big((1,-1,0)\,;\,(1,1,1)\big)}$

$\boxed{\big((1,-1,0)\,;\,(1,1,1)\big) \text{ en est une base}}$

Fin

$$S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_1 = (1,1,1) \\ \varepsilon_2 = (1,-1,0) \\ \varepsilon_3 = (1,0,1) \end{cases}$$

NB :

On a deux bases différentes.

Fin exercice 7