Prop 1 (Théorème de Cayley-Hamilton)

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\chi_f(f) = 0$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\chi_A(A) = 0$$

Q)

Soit : $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

1) Calculer $\chi_A(x)$.

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

Sol :

1) $\chi_A(x) = \cdots\cdots = X^2 + 2X + 1$

2) $\boxed{2mn}$

Épingler Copier

Autrement dit

Si $A = QBQ^{-1}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(A) = 0 \iff P(B) = 0$$

Sol :

Dpm $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

$P(A) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$

$\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{(QBQ^{-1})^k}_{=\, Q \cdot B^k \cdot Q^{-1}} = 0$

$\iff \sum_{k=0}^{n} a_k \, Q \cdot B^k \cdot Q^{-1} = 0$

$\iff Q \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k B^k \right) \cdot Q^{-1} = 0$

$\iff \sum_{k=0}^{n} a_k B^k = 0$

$\iff P(B) = 0$ $\square$

Si $(f - aI_E)(f - bI_E) = 0$, où $a \neq b$, On a :

$$E = \ker(f - aI_E) \oplus \ker(f - bI_E)$$

Justification

$E = \ker(0)$

$= \ker\left((f - aI_E) \circ (f - bI_E)\right)$

$= \ker(f - aI_E) \oplus \ker(f - bI_E)$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque $(X - a)$ et $(X - b)$ premiers entre eux car $a \neq b$.

Q : (déjà fait au TP)

p projecteur.

M.q. $E = \ker p \oplus \ker(p - I_E)$

Sol :

On a $p^2 = p \Longrightarrow p(p - I_E) = 0$

$X \wedge (X - 1) = 1$ (cond 1)

Décomp. des noyaux.

etc

to be continued