Correction

d'après problème Ensemble Cachan option économie année 2004.

1.a $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p^{k+1}}=\frac{1}{p}\frac{1-(1/p)^{n+1}}{1-1/p}=\frac{1-(1/p)^{n+1}}{p-1}$. $x_n\to\frac{1}{p-1}$ car $p\geq 2$ donc $|1/p|<1$.

1.b $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{p_0\cdots p_{n+1}}\geq x_n$ donc (x_n) est croissante. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n\geq 2$ donc $x_n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}=1$. La suite (x_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers un certain réel x. Puisque $x_0\leq x_n\leq 1$, à la limite $x_0\leq x\leq 1$ or $x_0>0$ donc $x\in\left]0,1\right]$.

2.a Avec les notations du 1., $f(p)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0p_1\cdots p_k}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0^{k+1}}=\frac{1}{p_0-1}$ car $p_1,\dots,p_k\geq p_0$. A la limite, on obtient $f(p)\leq\frac{1}{p_0-1}$. Or $p_0>q_0$ donc $p_0-1\geq q_0$ d'où $f(p)\leq\frac{1}{q_0}$ mais $f(q)\geq\frac{1}{q_0}+\frac{1}{q_0q_1}>\frac{1}{q_0}$ donc $f(p)<f(q)$.

2.b Supposons $p\neq q$ et considérons ℓ le plus petit indice tel que $p_\ell\neq q_\ell$. Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p_\ell>q_\ell$. Notons $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0\cdots p_k}$ et $y_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0\cdots p_k}$. Pour $n\geq\ell$, on a

$x_n=\frac{1}{p_0\cdots p_{\ell-1}}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{p_\ell\cdots p_k}$ et $y_n=\frac{1}{q_0\dots q_{\ell-1}}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{q_\ell\cdots q_k}$ avec $p_0\dots p_{\ell-1}=q_0\dots q_{\ell-1}\neq 0$. Comme dans la question 2.a, puisque $p_\ell>q_\ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{p_\ell\cdots p_k}<\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{q_\ell\dots q_k}$ donc $f(p)<f(q)$. Finalement $p\neq q\Rightarrow f(p)\neq f(q)$.

3.a Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n)=$ « y_n existe et $y_n\in\left]0,1\right]$ ».
La propriété est bien entendu vraie au rang 0. Supposons la vraie au rang $n\geq 0$.
Par hypothèse de récurrence y_n existe et $y_n>0$ donc $p_n=E(1+1/y_n)$ existe et par suite $y_{n+1}=p_ny_n-1$ aussi. Comme $p_n\leq 1+1/y_n<p_n+1$, on a $p_ny_n\leq y_n+1<p_ny_n+y_n$ car $y_n>0$. La première inégalité donne $y_{n+1}=p_ny_n-1\leq y_n\leq 1$ et la seconde donne $y_{n+1}=p_ny_n-1>0$. Ainsi $y_{n+1}\in\left]0,1\right]$ et la récurrence est établie. De plus, durant la démonstration de celle-ci, on a vu $y_{n+1}\leq y_n$ ce qui assure la décroissance de la suite (y_n).

3.b $x=y_0=\frac{1}{p_0}+\frac{y_1}{p_0}=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0p_1}+\frac{y_1}{p_0p_1}=\ldots=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0p_1}+\cdots+\frac{1}{p_0p_1\cdots p_n}+\frac{y_n}{p_0p_1\cdots p_n}$.

3.c Considérons $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. p est une suite d'entiers, $p_0=E(1+1/y_0)\geq 2$ car $y_0=x\leq 1$ et enfin p est une suite croissante car $p_n=E(1+1/y_n)$ et que la suite (y_n) est décroissante. Comme $\left|x-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0\cdots p_k}\right|\leq\frac{y_n}{p_0\cdots p_n}\leq\frac{1}{p_0\cdots p_n}\leq\frac{1}{2^n}\to 0$, on peut affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0\cdots p_k}=x$ autrement dit $f(p)=x$. Comme ceci vaut pour tout $x\in\left]0,1\right]$, on conclut que f est surjective (et finalement bijective).

4. On reprend les notations du 1.
$(\Leftarrow)$ Supposons qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $p_n=p_N$. On a alors, pour tout $n\geq N$,
$x_n=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0p_1}+\cdots+\frac{1}{p_0p_1\cdots p_N}+\frac{1}{p_0p_1\cdots p_N}\sum_{k=1}^{n-N}\frac{1}{p_N^k}$ donc
$x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0p_1}+\cdots+\frac{1}{p_0p_1\cdots p_N}+\frac{1}{p_0p_1\dots p_N(p_N-1)}\in\mathbb{Q}$.
$(\Rightarrow)$ Supposons $x\in\mathbb{Q}$. On peut écrire $x=a/b$ avec $a,b\in\mathbb{N}^*$. En reprenant les notations du 3., montrons par récurrence qu'on peut écrire $y_n=a_n/b$ avec $a_n\in\mathbb{N}^*$. Au rang 0, la propriété est vraie et si

elle est vraie au rang n alors $y_{n+1} = p_n y_n - 1 = (p_n a_n - b)/b = a_{n+1}/b$ avec a_{n+1} entier qui est nécessairement strictement positif car y_{n+1} l'est. La récurrence est établie. Puisque la suite (y_n) est décroissante, la suite de terme général $a_n = b y_n$ l'est aussi, or c'est là une suite d'entiers naturels, elle est donc stationnaire et il en est de même de la suite (y_n). Il en découle que la suite (p_n) définie par $p_n = E(1 + y_n^{-1})$ est elle aussi stationnaire et l'implication est démontrée.