Intégration sur un intervalle quelconque

1) Convergence d'une intégrale impropre (ou généralisée)

Définition 1 :

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ CPM, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) i) On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_a^y f(x)dx$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand y tend vers b.

   ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\displaystyle\lim_{y\to b}\left(\int_a^y f(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx$

Exemples :

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2$

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$ divergent.

Définition 2 :

Soit $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ CPM, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1) i) On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^b f(x)dx$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand y tend vers a.

   ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\displaystyle\lim_{y\to a}\left(\int_y^b f(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx$

Exemples :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = ?$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ divergent.

Définition 3 :

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ CPM, où $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in]a,b[$.

1) i) On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ convergent.

ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Exemples :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \pi$

Attention !

Si $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\left(\int_{-y}^{y} f(x)dx\right)$ existe dans $\mathbb{K}$, ceci ne garantit pas la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Contre-exemple : Considérer par exemple $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\ dx$

Proposition 4 :

Soit I un intervalle dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement.

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction CPM et F une primitive de f sur I .

1) $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est *convergente* si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x)$ existent dans $\mathbb{K}$.

2) Auquel cas on a $\displaystyle\int_I f(x)dx = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)$, noté $[F(x)]_a^b$.

Par exemple :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

Proposition 5 :

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ CPM, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, **alors** l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.

Exemple :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\ dx$ converge.

NB :

La Proposition 5 est à adapter au cas de **[a,b[** et quand $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$

Définition 6 :

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM, où I intervalle de $\mathbb{R}$.

1) L'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est dite absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(x)|dx$ converge.
2) On dit aussi que la fonction f est intégrable sur I.

NB :

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et positive alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est *intégrable* sur I.
2) L'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est *absolument convergente.*
3) L'intégrale $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est *convergente.*

Proposition 7 :

Si $f : I \to \mathbb{C}$ CPM.

1) $\displaystyle\int_I f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow \left(\int_I Re(f(x))dx \ et \ \int_I Im(f(x))dx \ convergent\right)$
2) Dans ce cas on a :

$$\int_I f(x)dx = \int_I Re(f(x))dx + i\int_I Im(f(x))dx$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow \alpha>1$

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *diverge* $\Leftrightarrow \alpha\leq 1$

iii) Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha - 1}$

iv) Si $\alpha \leq 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty$

2) i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow \alpha<1$

ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *diverge* $\Leftrightarrow \alpha\geq 1$

iii) Si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1 - \alpha}$

iv) Si $\alpha \geq 1$ alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty$

3) Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$

ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha<1$

Question classique :

Déterminer tous les réels α tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ converge.

Exercice d'application :

Soient $f, g : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ définies par $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2xi}}{x\sqrt{x}} \\ g(x) = \frac{e^{ix}}{x} \end{cases}$

Que dire de l'intégrabilité de f et g ?

Proposition 2 : (Autres fonctions intégrables usuelles)

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\lambda > 0$

ii) Si $\lambda > 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$

2) $\displaystyle\int_0^1 |\ln(x)|\, dx$ *converge.*

3) Cas des fonctions positives et relations de comparaisons

Proposition 1 :

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ CPM et positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_a^y f(x)dx$ est majorée.

2) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ diverge, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$

NB 1 :

De même, si $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ CPM et positive, où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_y^b f(x)dx$ est majorée.

2) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ diverge, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$

NB 2

En général, si $f : I \to \mathbb{R}$ CPM et positive alors :

1) i) l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$ converge si et seulement si l'ensemble des intégrales de f sur un segment contenu dans I est majoré.

   ii) Dans ce cas, la borne supérieure de cet ensemble est égale à l'intégrale $\int_I f(x)\,dx$.

2) En cas de divergence, on écrit $\int_I f(x)\,dx = +\infty$

Proposition 2

Soient f *et* $g : I \to \mathbb{R}$ CPM et positives.
Supposons que : $[\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)]$. On a :

1) $\left(\int_I g(x)\,dx \textit{ converge}\right) \Rightarrow \left(\int_I f(x)\,dx \textit{ converge}\right)$

2) $\left(\int_I f(x)\,dx \textit{ diverge}\right) \Rightarrow \left(\int_I g(x)\,dx \textit{ diverge}\right)$

NB :

Si g est intégrable sur I alors f l'est aussi.

Exemples :

1) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2020}}$?

2) Que dire de l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(3x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$?

Proposition 3

Soient f *et* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ CPM et positives ; où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Supposons que $f(x) \underset{x \to b}{=} O\,(g(x))$. On a :

1) $\int_a^b g(x)\,dx \textit{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \textit{ converge}$

2) $\int_a^b f(x)\,dx \textit{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \textit{ diverge}$

NB 1 :

La *proposition 3* vaut aussi si on remplace $f(x) \underset{x \to b}{=} O\,(g(x))$ par $f(x) \underset{x \to b}{=} o\,(g(x))$.

NB 2 :

La *proposition 3* est à adapter à l'intervalle $]a, b]$; où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice d'application : (Intégrales de Bertrand)

1) Quelle est la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$?
   où $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Même question si $0 < \alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 4

Soient f *et* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ CPM et positives ; où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Supposons que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$. On a :

1) $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx \text{ converge} \iff \int_a^b f(x)\, dx \text{ converge}$

2) Autrement dit :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ sont de même nature.

NB 1 :

La *proposition 4* est à adapter à l'intervalle $]a, b]$; où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

NB 2 :

La *proposition 4* est valable aussi quand f est négative.

NB 3 :

1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$

Considérer par exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$

2) *Contrairement aux séries*, on a :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge} \not\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Considérer par exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx$; elle converge.

(voir paragraphe 8 : changement de variable)

Exemple express :

Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + x^{2020}}$?

4) Propriétés relatives aux intégrales généralisées

Proposition 1 : (Linéarité)

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ CPM et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) **Si** les intégrales $\displaystyle\int_I f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_I g(x)\, dx$ convergent **alors** il en est de même pour l'intégrale $\displaystyle\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx$.

2) Le cas échéant, on a

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_I f(x)\, dx + \beta \int_I g(x)\, dx$$

Corollaire 2 :

Notons $\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K}) \mid \displaystyle\int_I f(x)\, dx \text{ converge}\}$.

1) $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) L'application $f \mapsto \int_I f(x)\,dx$ est une forme linéaire sur $\mathcal{H}$.

Proposition 3 : (Positivité-Croissance)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ CPM. Supposons que $\int_I f(x)\,dx$ et $\int_I g(x)\,dx$ convergent.

1) $f \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_I f(x)\,dx \geq 0$ (Positivité de l'intégrale généralisée)

2) $f \geq g \;\Rightarrow\; \int_I f(x)\,dx \geq \int_I g(x)\,dx$ (Croissance de l'intégrale généralisée)

Proposition 4 : (Intégrale nulle d'1 fonct continue positive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Si $\begin{pmatrix} 1)\ f \text{ est continue sur } I \\ 2)\ f \text{ est positive sur } I \\ 3)\ \displaystyle\int_I f(x)\,dx = 0 \end{pmatrix}$ **alors** $(\forall x \in I,\ f(x) = 0)$

Proposition 5 : (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ CPM, positive et décroissante. On a :

$$\sum_{n\geq 0} f(n) \text{ converge} \;\Leftrightarrow\; \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Autrement dit : La série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature.

Exercice d'application : (Intégrales de Bertrand)

Montrer que

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\,(\ln n)^{\beta}} \text{ converge} \;\Leftrightarrow\; \beta > 1$$

5) Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 1 :

1) (f intégrable) $\Leftrightarrow$ ($|f|$ intégrable) $\Leftrightarrow$ ($\overline{f}$ intégrable)

2) Toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est une fonction intégrable.

3) L'ensemble des fonctions intégrables, noté $L^1(I, \mathbb{K})$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4) L'application $f \mapsto \int_I f(x)\,dx$ est une forme linéaire de $L^1(I, \mathbb{K})$.

Proposition 2 :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ CPM.

1) f est intégrable si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont intégrables.

2) Autrement dit :

$$\int_I |f(x)|dx \; converge \Leftrightarrow \left(\int_I |Re(f(x))| \; dx \; et \; \int_I |Im(f(x))| \; dx \; convergent\right)$$

Proposition 3 :

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM.

1) **Si** $\int_I f(x)\; dx$ est ACV **alors** $\int_I f(x)\; dx$ est convergente.

2) Dans ce cas, on a l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_I f(x)\; dx\right| \leq \int_I |f(x)|\; dx$$

NB :

La **réciproque** est en général **fausse**.

Contre-exemple : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\; dx$ converge mais pas absolument.

6) Fonctions de carré intégrable

Notation et vocabulaire :

1. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM. Si f^2 est intégrable sur I, on dit que f est de carré intégrable.
2. $L^2(I, \mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1 :

1. Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est une fonction intégrable.
2. La combinaison linéaire de deux fonctions de carré intégrable sur I est une fonction de carré intégrable.
3. $L^2(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démo en bref :

1. Supposons que $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$. Montrons que fg est intégrable.
   On a $|fg| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$ et $\frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$ est intégrable.
2. Supposons que $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$.
   $|\alpha f + \beta g|^2 \leq |\alpha|^2|f|^2 + |\beta|^2|g|^2 + 2|\alpha||\beta||f||g|$.
   $|f||g|$ intégrable selon la proposition 1. $|f|^2$ et $|g|^2$ aussi. Donc leur combinaison linéaire est intégrable. Enfin $|\alpha f + \beta g|^2$ intégrable.

Proposition 2 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g \in L^2(I, \mathbb{R})$.On a

$$\left|\int_I f(x)g(x)\; dx\right| \leq \sqrt{\int_I f^2(x)\; dx} \times \sqrt{\int_I g^2(x)\; dx}$$

Démo en bref :
On commence par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur un segment, puis on finit par passage à la limite (ou aux limites) ; selon le type de l'intervalle I.

7) Intégration par parties

Proposition :
Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{K})$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On suppose que $\lim\limits_{x \to b} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{K}$. Alors :

1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\ dx$ sont de même nature.
2) En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b = \lim\limits_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)$

Démo en bref :
$\forall y \in [a, b[,\ \displaystyle\int_a^y f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^y - \int_a^y f(x)g'(x)\ dx$
Et $\lim\limits_{y \to b} [f(x)g(x)]_a^y$ existe dans $\mathbb{K}$. On conclut.

NB 1 :
La proposition vaut pour $]a, b]$:
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, et on conclut que :

1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\ dx$ seront de même nature.
2) En cas de convergence, on aura :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - \lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$.

NB 2 :
La proposition vaut aussi pour $]a, b[$:
On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)g(x)$ existent dans $\mathbb{K}$. Et on conclut que :

1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\ dx$ seront de même nature.
2) En cas de convergence, on aura :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b = \lim\limits_{x \to b} f(x)g(x) - \lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$

Exercice d'application 1 (classique) :

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ converge.

Exercice d'application 2 (classique) :

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

1) Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.
3) En déduire, sans récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

8) Formule de changement de variable

Proposition :

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue.
Soit $\Phi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante.

1) Les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\ \Phi'(t)\, dt$ sont de même nature.
2) En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\ \Phi'(t)\, dt$$

NB 1 : (Cas où Φ est strictement décroissante)
Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue.
Soit $\Phi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement décroissante.

1) Les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\ \Phi'(t)\, dt$ sont de même nature.
2) En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\ \Phi'(t)\, dt$$

NB 2 :
On adapte cette proposition ainsi que le NB1 aux cas : $[a, b[$ et $]a, b]$.

Exercice d'application :

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$ converge.

9) Intégration des relations de comparaison

Proposition 1 : **(Comparaison de $\displaystyle\int_x^b f$ et $\displaystyle\int_x^b g$)**

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \ \textit{converge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$

2) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \ \textit{converge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g\right)$

3) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \ \textit{converge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

Proposition 2 :

Soient $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{=} o(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \ \textit{diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$

2) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{=} O(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \ \textit{diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g\right)$

3) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \ \textit{diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$

NB :

La Proposition 1 et la Proposition 2 sont à adapter au cas de l'intervalle $]a, b]$ où $x \to a$:

1) Dans la Proposition 1 , on aura la comparaison de $\displaystyle\int_a^x f$ et $\displaystyle\int_a^x g$ quand $x \to a$.

2) Dans la Proposition 2 , on aura la comparaison de $\displaystyle\int_x^b f$ et $\displaystyle\int_x^b g$ quand $x \to a$.

Exercice d'application 1 :

1) Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{2018 + t^4}\, dt$ quand $x \to +\infty$.

2) Même question pour $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2019 + \sqrt{t}}\, dt$ quand $x \to +\infty$.

3) Même question pour $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{2020 + t}\, dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice d'application 2 :

1) Justifier que :

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge.

ii) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$

2) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ quand $x \to +\infty$.

Rappel : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$

Exercice d'application 3 :

1) i) Déterminer un équivalent simple quand $t \to +\infty$ de $\left(\frac{e^{t^2}}{2t}\right)'$

ii) En déduire un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}\, dt$

2) Avec le même principe, déterminer un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.