CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Lundi 30 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé d'un problème avec quatre parties.

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Q2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|I - s_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

Q3. *Informatique* : écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie l'entier $n!$.

Q4. *Informatique* : en déduire un script, qui détermine un entier N, tel que $|I - s_N| \leqslant 10^{-6}$.

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Q5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
En déduire que :

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.$$

Fin extrait