Fonction de Lambert et étude d'une famille de fonctions

Partie I

On considère $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par $g(x)=x\mathrm{e}^x$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité égale à 2 cm.

1.a Dresser le tableau des variations de g.

1.b Etudier les branches infinies de g.

2.a Etudier la concavité de g. En quel point la courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une d'inflexion ?

2.b En quel point la tangente au point d'inflexion coupe-t-elle l'axe des abscisses.

2.c Représenter $\mathcal{C}$ accompagnée de la tangente précisée ci-dessus.

3.a Montrer que la restriction de g au départ de $[-1,+\infty[$ réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera. Dresser le tableau de variation complet de son application réciproque notée h.

3.b Sur quel intervalle la fonction h est-elle dérivable ?
Exprimer $h'(x)$ en fonction de x, de $h(x)$ mais sans exponentielles.

3.c Etudier l'existence d'une tangente à h en $-1/\mathrm{e}$.

4. Dans cette question on se propose d'obtenir une valeur numérique approchée de $\alpha=h\left(\frac{1}{2}\right)$.

4.a Justifier que $\alpha\in[0,1/2]$.

4.b On introduit la fonction dérivable $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Montrer que $\varphi(\alpha)=\alpha$ et $\forall x\geq 0$, $|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

4.c On définit une suite récurrente réelle (u_n) par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\varphi(u_n)$.

Etablir que la suite (u_n) converge vers α.

4.d Donner une valeur décimale approchée de α à la précision 10^{-2} en précisant la démarche suivie.

Partie II

Soit λ un paramètre <u>strictement positif</u>.

On étudie ici la famille des fonctions $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par $f_\lambda(x)=\mathrm{e}^{-x}+\lambda x^2$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

1.a Dresser le tableau des variations de f_λ.
On notera m_λ le point où f admet un minimum et on exprimera m_λ en fonction de h et de λ.
Etablir que $f_\lambda(m_\lambda)=\lambda m_\lambda(m_\lambda+2)$.

1.b Etudier les branches infinies de f_λ et la convexité de cette fonction.

1.c Donner l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$.

2. Dans cette question on étudie la fonction $m:\lambda\mapsto m_\lambda$ définie sur $\mathbb{R}^{+}*$.

2.a Etudier la monotonie de $m:\lambda\mapsto m_\lambda$ ainsi que ses limites quand $\lambda\to+\infty$ et quand $\lambda\to 0^+$.

2.b En observant la relation $2\lambda m_\lambda=\mathrm{e}^{-m_\lambda}$, déterminer un équivalent simple de m_λ quand $\lambda\to+\infty$.

2.c En observant la relation $m_\lambda + \ln(m_\lambda) = -\ln(2\lambda)$, déterminer un équivalent simple de m_λ quand $\lambda \to 0^+$.

3. Dans cette question on étudie $\theta : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(\lambda) = f_\lambda(m_\lambda) = \lambda m_\lambda(m_\lambda + 2)$.

3.a Montrer que θ est une fonction croissante.

3.b Déterminer la limite de θ en 0^+ et en $+\infty$.

On prolonge θ par continuité en 0 en posant $\theta(0)$ égal à sa limite en 0^+.

3.c La fonction θ est-elle dérivable en 0 ? Présente-t-elle une tangente en 0 ?

3.d Représenter graphiquement la fonction θ dans un repère orthonormé d'unité égale à 4 cm.
On exploitera les informations obtenues ci-dessus ainsi que la valeur approchée de α pour obtenir un point de la courbe accompagné de sa tangente.