Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Intégrales Impropres

Exercice 1 :

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$

d) $\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}\,dt$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,dt$

f) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

g) $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,dt$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$

i) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$

Exercice 2 :

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais pas absolument.

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.

a) Montrer que f' est de carré intégrable.

b) Montrer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 4 :

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,dt$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{t^a\,e^{-t}}{1+t^b}\,dt$

2) Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$$

Exercice 5 : (Intégrales de Bertrand)
Pour $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{R}$, on étudiera les intégrales de Bertrand suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt$$

1) Montrer que

$$\forall \alpha \succ 1,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt \ converge$$

2) Montrer que

$$\forall \alpha \prec 1,\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt \ diverge$$

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t (\ln t)^\beta}\, dt \ converge \ \Leftrightarrow \ \beta \succ 1$$

Exercice 6 :

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$
b) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$
c) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
d) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7 :

a) Justifier l'existence de

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

b) Établir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

puis donner la valeur de I.

Exercice 8 :

a) Justifier l'existence de
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Pour $x>0$, on pose
$$I(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) On rappelle $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$. Établir que
$$I(x)=\frac{3}{4}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire la valeur de I.

Exercice 9 :

a) Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\mathrm{e}^x\geq 1+x$$
En déduire
$$\forall t\in\mathbb{R},1-t^2\leq \mathrm{e}^{-t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$$

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes
$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, I_n=\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$
puis établir
$$I_n\leq\frac{I}{\sqrt{n}}\leq J_n$$

c) On pose
$$W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$
Établir
$$I_n=W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1}=W_{2n}$$

d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
En déduire la constance de la suite de terme général
$$u_n=(n+1)W_nW_{n+1}$$

e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.