Exercice 6 (CCP 2020 : Extrait et adapté)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_B(f) = A$; où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c'te

Notons $\chi_A(X) = det(XI_3 - A)$.

1) Montrer que $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-4)$.
   Notons $E_1(f) = ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $E_4(f) = ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})$.
2) Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $E_1(f)$ et une base (ε_3) de $E_4(f)$.
   Notons maintenant $B_p = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
3) Vérifier que B_p est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire D, la matrice de f dans cette base.

Exercice 6 (CCP 2020 : Extrait et adapté)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_B(f) = A$; où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

f c'est l'endom canoniquement associé à A

Notons $\chi_A(X) = det(XI_3 - A)$.

1) Montrer que $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-4)$.
   Notons $E_1(f) = ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $E_4(f) = ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})$.
2) Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $E_1(f)$ et une base (ε_3) de $E_4(f)$.
   Notons maintenant $B_p = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
3) Vérifier que B_p est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire D, la matrice de f dans cette base.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z) \in E_1(f) \iff (x,y,z) \in \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$$

$$\iff (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\iff x+y+z=0$$

$$E_1(f) = \mathrm{vect}(\ ?\ )$$

$x+y+z=0$

$\iff x+y+z=0$

$\iff x=-y-z$

$\iff (x,y,z)=(-y-z,y,z)$

$\iff (x,y,z)=y\cdot(-1,1,0)+z\cdot(-1,0,1)$

$\iff (x,y,z)\in \mathrm{Vect}\big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)$

1) $x\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) \iff \left(\exists \lambda_1,\dots,\lambda_p\in \mathbb{K},\ x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i\right)$

2) $x\in \mathrm{Vect}(u,v) \iff \left(\exists \lambda,\alpha\in \mathbb{K},\ x=\lambda u+\alpha v\right)$

3) $x\in \mathrm{Vect}(u) \iff \left(\exists \lambda\in \mathbb{K},\ x=\lambda . u\right)$

$$E_1(f) = \text{vect}\big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)$$

$\Rightarrow \big((-1,1,0);(-1,0,1)\big)$ f^{lle} gén de $E_1(f)$

elle est libre car ses 2 vect ne sont clairement pas colinéaires

D'où $\big(\underbrace{(-1,1,0)}_{\varepsilon_1};\underbrace{(-1,0,1)}_{\varepsilon_2}\big)$ est une base de $E_1(f)$

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est ainsi une base de $E_1(f)$

1) $x \in \text{Vect}(u_1,\dots,u_p) \iff \left(\exists \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K},\ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i\right)$

2) $x \in \text{Vect}(u,v) \iff (\exists \lambda,\alpha \in \mathbb{K},\ x = \lambda u + \alpha v)$

3) $x \in \text{Vect}(u) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K},\ x = \lambda u)$

$(u_1,\dots,u_p)$ f^{lle} gén de l'espace $\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$

4) (u,v) libre $\iff$ u et v ne sont pas colinéaires
(u,v) liée $\iff$ u et v colinéaires

5) (u) libre $\iff u \neq 0$