Fonctions usuelles

Résumé

I) Fonctions circulaires réciproques

1) Fonction arccos

Prop et déf 1

1) Cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

2) Cos définit une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$.

3) Sa réciproque $\cos^{-1}$ s'appelle la fonction arc cosinus, et se note arccos.

4) arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Résumé (à retenir)

1) $[0, \pi] \xrightarrow{\text{Cos bijective}} [-1, 1]$

2) $[-1, 1] \xrightarrow{\text{arccos bijective}} [0, \pi]$

3) $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1], \cos(x) = y \iff x = \arccos(y)$

4) $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$

5) $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$

Prop 2 :

1) $\forall x, y \in [0, \pi]$. On a :

a) $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $\cos(x) < \cos(y) \Leftrightarrow x > y$

2) $\forall x, y \in [-1, 1]$. On a ;

a) $\arccos(x) = \arccos(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $\arccos(x) < \arccos(y) \Leftrightarrow x > y$

Prop 3 :

$\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

Prop 4

arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Corollaire 5

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$ est arccos .

2) Fonction arcsin

Prop et déf 1

1) sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) sin définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$.

3) Sa réciproque $\sin^{-1}$ s'appelle la fonction arc sinus, et se note arcsin.

4) arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Résumé (à retenir)

1) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\text{Sin bijective}} [-1, 1]$

2) $[-1, 1] \xrightarrow{\text{arcsin bijective}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall y \in [-1, 1], \ \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y)$

4) $\forall x \in [-1, 1], \ \sin(\arcsin(x)) = x$

5) $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ \arcsin(\sin(x)) = x$

Prop 2 :

1) $\forall x,y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. On a :

a) $\sin(x)=\sin(y) \iff x=y$

b) $\sin(x)<\sin(y) \iff x<y$

2) $\forall x,y \in [-1,1]$. On a ;

a) $\arcsin(x)=\arcsin(y) \iff x=y$

b) $\arcsin(x)<\arcsin(y) \iff x<y$

Prop 3 :

arcsin est impaire.

Prop 4

arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Corollaire 5

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ est

arcsin.

3) Fonction arc tangente

Prop et déf 1

1) tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) tan définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

3) Sa réciproque $\tan^{-1}$ s'appelle la fonction arc tangente et se note arctan.

4) arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résumé (à retenir)

1) $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\xrightarrow{\text{tan bijective}} \mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{arctan bijective}} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

3) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \forall y \in \mathbb{R}, \tan(x) = y \iff x = \arctan(y)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$

5) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$

6) $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

7) $D_{\arctan} = \mathbb{R}$

Prop 2 :

1) $\forall x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a :

a) $\tan(x) = \tan(y) \iff x = y$

b) $\tan(x) < \tan(y) \iff x < y$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. On a ;

a) $\arctan(x) = \arctan(y) \iff x = y$

b) $\arctan(x) < \arctan(y) \iff x < y$

Prop 3

arctan est impaire.

Prop 4 :

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

II) Fonctions hyperboliques

1) Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Déf 1 (cosinus hyperbolique)

On la note cosh ou ch.

Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Déf 2 (Sinus hyperbolique)

On la note sinh ou sh.

Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ Sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Prop 3 :

1) Parité :

a) ch est paire.

b) sh est impaire.

2) Dérivabilité :

a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $ch' = sh$

b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $sh' = ch$

Prop 4 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \; Ch(x) \geqslant 1$

2) $\forall x \geqslant 0, \; sh(x) \geqslant 0$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

   a) $Ch(x) = 1 \iff x = 0$

   b) $Sh(x) = 0 \iff x = 0$

Corollaire 5 (Monotonie de Ch et sh)

1) La fonction Ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2) La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Prop 6 : (Formules de transformations)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

☆ 1) $Ch^2(a) - sh^2(a) = 1$

☆ 2) $ch(a+b) = Ch(a)\,ch(b) + sh(a)\,sh(b)$

☆ 3) $Sh(a+b) = sh(a)\,ch(b) + Sh(b)\,ch(a)$

4) $ch(a-b) = Ch(a)\,ch(b) - sh(a)\,sh(b)$

5) $Sh(a-b) = sh(a)\,ch(b) - Sh(b)\,ch(a)$

6) $Sh(2a) = 2\,Sh(a)\,Ch(a)$

7) $$\boxed{\begin{array}{c} ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a) \\ \hline ch(2a) = 2ch^2(a) - 1 \\ \hline ch(2a) = 1 + 2sh^2(a) \end{array}}$$

NB :

Tout comme pour les formules de transformations pour cos et sin, il suffit de mémoriser les trois formules marquées par ☆, les autres en découlent.

2) Fonctions tangente hyperbolique

Déf 1 (tangente hyperbolique)

On la note tanh ou th.

Elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

Prop 2 :

1) th est impaire.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2(x)$

3) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2(x)$$

4) th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

III) Fonctions hyperboliques réciproques

1) Fonction argument sinus hyperbolique

Prop et déf 1

1) Sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3) Sa réciproque Sh^{-1} s'appelle la fonction argument sinus hyperbolique, et se note argsh.

NB :

On l'appelle aussi arc sinus hyperbolique, et se note arcsinh.

Résumé (à retenir)

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{sh bijective}} \mathbb{R}$

2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{argsh bijective}} \mathbb{R}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ sh(x) = y \iff x = argsh(y)$

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \ sh(argsh(x)) = x$

5) $\forall x \in \mathbb{R}, \ argsh(sh(x)) = x$

6) argsh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Prop 2:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. On a :

a) $sh(x) = sh(y) \iff x = y$

b) $sh(x) < sh(y) \iff x < y$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. On a ;

a) $argsh(x) = argsh(y) \iff x = y$

b) $argsh(x) < argsh(y) \iff x < y$

Prop 3:

argsh est impaire.

Prop4

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \; ch(argsh(x)) = \sqrt{1+x^2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \; th(argsh(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Prop5

argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Prop 6 (Expression logarithmique de argsh(x))

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; argsh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

2) Fonction argument cosinus hyperbolique

Prop et déf 1

1) Ch est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) Ch définit une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$.

3) Sa réciproque Ch^{-1} s'appelle la fonction argument cosinus hyperbolique, et se note argch.

4) argsh est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

NB :

On l'appelle aussi arc cosinus hyperbolique, et se note arccosh.

Résumé (à retenir)

1) $[0,+\infty[\xrightarrow{\text{Ch bijective}} [1,+\infty[$

2) $[1,+\infty[\xrightarrow{\text{argch bijective}} [0,+\infty[$

3) $\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall y \in [1,+\infty[,\ ch(x)=y \iff x=argch(y)$

4) $\forall x \in [1,+\infty[,\ Ch(argch(x))=x$

5) $\forall x \in [0,+\infty[,\ argch(ch(x))=x$

Prop 2 :

1) $\forall x, y \in [0, +\infty[$. On a :

a) $ch(x) = ch(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $ch(x) < ch(y) \Leftrightarrow x < y$

2) $\forall x, y \in [1, +\infty[$. On a ;

a) $argch(x) = argch(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $argch(x) < argch(y) \Leftrightarrow x < y$

Prop 3

1) $\forall x \in [1, +\infty[$, $sh(argch(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

2) $\forall x \in [1, +\infty[$, $th(argch(x)) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Prop 4 :

argch est dérivable sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \; argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Prop 5 (Expression logarithmique de $\text{argch}(x)$)

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ \text{argch}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

3) Fonction argument tangente hyperbolique

Prop et déf 1

1) th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) th définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

3) Sa réciproque th^{-1} s'appelle la fonction argument tangente hyperbolique, et se note argth.

4) argth est continue et strictement croissante sur $]-1,1[$.

NB :

On l'appelle aussi arc tangente hyperbolique, et se note arctanh.

Résumé (à retenir)

1) $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{th bijective}}]-1,1[$

2) $]-1,1[\xrightarrow{\text{argth bijective}} \mathbb{R}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in]-1,1[$, $\text{th}(x) = y \Leftrightarrow x = \text{argth}(y)$

4) $\forall x \in]-1,1[$, $\text{th}(\text{argth}(x)) = x$

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{argth}(\text{th}(x)) = x$

Prop 2:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. On a :

a) $\text{th}(x) = \text{th}(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $\text{th}(x) < \text{th}(y) \Leftrightarrow x < y$

2) $\forall x, y \in]-1,1[$. On a ;

a) $\text{argth}(x) = \text{argth}(y) \Leftrightarrow x = y$

b) $\text{argth}(x) < \text{argth}(y) \Leftrightarrow x < y$

Prop 3

argth est impaire.

Prop 4 :

argth est dérivable sur $]-1,1[$, et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Prop 5 (Expression logarithmique de arg th(x))

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Prop 6 (Limites usuelles)

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} = 1$

3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

5) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{argsh} x}{x} = 1$

6) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{argth} x}{x} = 1$

Fin