I. Généralités sur les endmorphismes nilpotents

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors il est trigonalisable (puisque admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{R}$) et son spectre est réduit à $\{0\}$, donc $tr(u) = 0$. De même u^k est nilpotent, donc $tr\left(u^k\right) = 0$.

2. $0 \in \mathcal{N}_B$ de plus si u, v sont deux éléments de $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda mat_{\mathcal{B}}(u) + \mu mat_{\mathcal{B}}(u) \in T_n^{++}$, donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{N}_B$.

   L'application $f : \mathcal{N}_B \to T_n^{++}(\mathbb{R})$ $, u \mapsto mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels donc $\dim \mathcal{N}_B = \dim T_n^{++} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Si $u \in \mathcal{N}(E)$ ou $\mathcal{N}_B$, et p l'indice de nilpotence, alors $p \leq n$ donc $u^n = 0$, donc $1 \leq v(u) \leq n$.

   D'autre part si u désigne l'endomorphisme de E de matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans B, alors $v\left(u^k\right) = k$ pour $1 \leq k \leq n$, donc $[\![1, n]\!]$. Donc $\{v(u) / u \in \mathcal{N}(E)\} = \{v(u) / u \in \mathcal{N}_B\} = [\![1, n]\!]$.

4. u est nilpotent d'indice n, donc $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre.

   Si la famille $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre, alors $u^{q-1}(y) \neq 0$ et donc $(y, u(y), ..., u^{q-1}(y))$ est libre.

   Soit $\left(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}, \beta_0, ..., \beta_{q-1}\right) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i u^i(y) = 0$.On compose par u^q, ce qui donne $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^{i+q}(x) = 0$ ou encore $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1-q} \alpha_i u^{i+q}(x) = 0$ puis par indépendance de la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ on a $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., p-1-q\}$ .Donc $\displaystyle\sum_{i=p-q}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i u^i(y) = 0$ puis on compose par u^{q-1} ce qui donne $\alpha_{p-q} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$ (puisque si $i > p-q$, alors $i + q - 1 \geq p$) puis par indépendance de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$, on a $\beta_{q-1} = \alpha_{p-q} = 0$.

   On a donc $\displaystyle\sum_{i=p-q+1}^{p-1} \alpha_i u^{i+q-1}(x) + \sum_{i=0}^{q-2} \beta_i u^{i+q-1}(y) = 0$ puis on compose par u^{q-2} , ce qui donne que $\alpha_{p-q+1} = \beta_{q-2} = 0$.

   Supposons que $\alpha_{p-q+i} = \beta_{q-i-1}$, alors par un raisonnement analogue en composant par u^{q-i-1}, on a $\alpha_{p-q+i+1} = \beta_{q-i-2} = 0$. D'où le résultat.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p , l'inclusion $\operatorname{Im}(u^{p-1}) \subset \operatorname{Im}(u) \cap \ker(u)$ est immédiate ($u^p = 0$ et $p \geq 2$).

   Soit y un élément non nul de $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u)$ donc $y = u(a)$ avec $u^2(a) = 0$ pour un certain $a \in E$.

   Si $(u^{p-1}(x), u(a))$ est libre, alors par la question précédente la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x), a, u(a))$ est une famille libre de E de cardinal $p + 2 > n$, ce qui est absurde, la famille $(u^{p-1}(x), u(a))$ est liée, par suite $y = u(a) \in$Vect$\{u^{p-1}(x)\}$, donc $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u) =$Vect$\{u^{p-1}(x)\} \subset \operatorname{Im}(u^{p-1})$.

Ce qui donne $\operatorname{Im}(u) \cap \ker(u) = \operatorname{Im}(u^{p-1}) = \operatorname{Vect}\{u^{p-1}(x)\}$. En particulier $\dim \operatorname{Im}(u^{p-1}) = 1$.

II. Endomorphisme de rang 1 d'un espace euclidien.

6. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, pour tout $(a,b) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,on a:

$$\forall z \in E\ ,((\lambda a + b) \otimes x)(z) = (\lambda a + b \mid z)\, x = \lambda (a \mid z)\, x + (b \mid z)\, x = \lambda (a \otimes x)(z) + (b \otimes x)(z)$$

Donc

$$(a + \lambda b) \otimes x = \lambda (a \otimes x) + (b \otimes x)$$

D'où la linéairité de $a \mapsto (a \otimes x)$.

Par définition de $(a \otimes x)$, on a $\operatorname{Im}((a \otimes x)) \subset \operatorname{Vect}(x)$.

Si $(a \otimes x) = (b \otimes x)$, alors pour tout $z \in E$, $(a \mid z)\, x = (b \mid z)\, x$ donc $(a - b \mid z) = 0$ pour tout $z \in E$. Ainsi $b - a \in E^{\perp} = \{0\}$ donc $a = b$, ce qui assure l'injectivité de $a \mapsto (a \otimes x)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Vect}(x)$.

Si $u = 0$, alors $u = (0 \otimes x)$.

Si $u \neq 0$, alors $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(x)$, on a $\dim \ker(u) = n - 1$. Considérons une base orthonormée de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ de $\ker(u)$ qu'on complète en une b.o.n $(e_1, ..., e_{n-1})$ de E.

Si $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, alors $u(z) = \alpha_n u(e_n) = \lambda \alpha_n x$ où $u(e_n) = \alpha_n x$. Posons $\lambda e_n = a$.

Donc $u(z) = (z \mid \lambda e_n)\, x = (a \mid z)\, x = (a \otimes x)(z)$ pour tout $z \in E$. Donc $u = (a \otimes x)$

D'où la surjectivité.

7. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E, alors

$$\operatorname{Tr}((a \otimes x)) = \sum_{i=1}^{n} ((a \otimes x)(e_i) \mid e_i) = \sum_{i=1}^{n} (a \mid e_i)(x \mid e_i) = (a \mid x)$$

III Deux lemmes

8. Supposons que $(u + tv)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}$, alors en écrivant $(u + tv)^{k+1} = (u + tv)^k (u + tv)$ on a:

$$(u + tv)^{k+1} = \left(\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} \right)(u + tv) = f_0^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k} t^i \left(f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v \right)$$

Posons $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u$ et $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v$.

Supposons qu'il existent une autre famille d'endomorphisme $\left(g_i^{(k)}\right)$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i^{(k)}$, alors pour $t = 0$, $f_0^{(k)} = g_0^{(k)}$. Supposons que $f_i^{(k)} = g_i^{(k)}$ pour $i \leq p - 1$, alors pour tout $t \neq 0$, on a $\displaystyle\sum_{i=p}^{k} t^{i-p} f_i^{(k)} = \sum_{i=p}^{k} t^{i-p} g_i^{(k)}$ puis on passe à la limite en 0 ce qui donne que $f_p^{(k)} = g_p^{(k)}$.

D'où l'unicité de l'écriture.

D'après la relation $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)}u$, on a à l'aide d'une récurrence immédiate que $f_0^{(k)} = u^k$.
On a $f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)}u + f_0^{(k)}v = f_1^{(k)}u + u^k v$. avec $f_1^{(1)} = v$.

Supposons que $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$, alors

$$f_1^{(k+1)} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}\right) u + u^k v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + u^k v = \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i}$$

9. $\mathcal{V}$ est un sous-espace nilpotent donc $u+tv \in \mathcal{V}$. Par définition de $p = \max_{u\in\mathcal{V}} \nu(u)$, on a $(u+tv)^p = 0$

Donc $\sum_{i=0}^{p} t^i f_i^{(p)} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui donne (par unicité établi en **9.)**, que $f_i^{(p)} = 0$ pour tout $i \leq p$.

En particulier $f_1^{(p)} = 0$ ce qui donne la relation $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. D'après la question **8,**on a $tr\left(f_1^{(k)}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} tr\left(u^i v u^{k-1-i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} tr\left(u^{k-1-i} u^i v\right) = k\ tr\left(u^{k-1} v\right)$.

On a $tr\left((u+tv)^p\right) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{k} t^i tr\left(f_i^{(k)}\right) = 0$ donc $tr\left(f_i^{(k)}\right) = 0$ (unicité du développement limité).

On a $tr\left(f_1^{(k+1)}\right) = 0$, donc $0 = tr\left(f_1^{(k+1)}\right) = (k+1)\ tr\left(u^k v\right)$, ce qui donne $tr\left(u^k v\right) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

11. Soit $a \in K(\mathcal{V})^{\perp}$, on a $(u+tv)^{p-1}(y) \in K(\mathcal{V})$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(a \mid (u+tv)^{p-1}(y)\right) = 0$.

Puis à l'aide de la question **8.**, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{k} t^i \left(a \mid f_i^{(k)}(y)\right) = 0$, puis $\left(a \mid f_1^{(p-1)}(y)\right) = 0$ pour tout $a \in K(\mathcal{V})^{\perp}$, donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

On a $u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i}(y) = \sum_{j=1}^{p-1} u^j v u^{p-1-j}(y)$, puis à l'aide de la question **9.** on a

$$u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i}(y) = -vu^{p-1}(y) = -v\left(u^{p-1}(y)\right)$$

Pour $x \in \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$, il existe $y \in E$ tel que $y = u^{p-1}(x)$. Par l'égalité

$$v(x) = v\left(u^{p-1}(y)\right) = -u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right)$$

$f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$, donc $v(x) \in u\left(K(\mathcal{V})\right)$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$.
Par récurrence sur k.
Pour $k = 0$, $\lambda_0 = 0$ et $y_0 = y \in K(\mathcal{V})$. Supposons que qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. $y_k \in K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, donc on peux écrire $y_k = \mu_k x + v(x)$ où $v \in \mathcal{V}$.

On a $x \in \operatorname{Im}\left(u^{p-1}\right)$ donc pour $k \geq 1$, on a $u^{k}(x) \in \operatorname{Im}\left(u^{k+p-1}\right)=0$ (puisque $u^{p}=0$).

On peux donc écrire $y=\lambda_{k} x+u^{k}(v(x))$. D"après la question **11**, $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$, donc $u^{k}(v(x)) \in u^{k+1}(K(\mathcal{V}))$, donc il existe $y_{k+1} \in K(\mathcal{V})$ tel que $u^{k}(v(x))=u^{k+1}\left(y_{k+1}\right)$.

Par suite $y=\lambda_{k+1} x+u^{k+1}\left(y_{k+1}\right)$. (avec $\lambda_{k+1}=\lambda_{k}$).

Pour $k=p$, on a $u^{p}=0$, donc $y=\lambda_{p} x \in K(\mathcal{V})$.

On a $x \in \operatorname{Im}\left(u^{p-1}\right) \subset K(\mathcal{V})$, donc $v(x) \in v(K(\mathcal{V})) \subset K(\mathcal{V}) \subset$Vect$(x)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(y)=\alpha x$. α est donc une valeur propre de v donc $\alpha=0$. Ainsi $v(y)=0$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13. Les applications $f: \mathcal{V} \rightarrow E$, $v \mapsto v(x)$ est linéaire , $\mathcal{V}_{x}=\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)=\mathcal{W}$ sont des sous-espaces respectives de E et $\mathcal{V}$.

    l'application $g: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{L}(H), u \mapsto \bar{u}$ est linéaire, donc $\ker(g)=\mathcal{Z}$ et $\operatorname{Im}(g)=\overline{\mathcal{V}}$ sont des sous-espaces vectoriels respectives de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{L}(H)$.

14. D'après la formule du rang,

$$\dim \mathcal{V}=\dim \ker\left(\mathcal{V}_{x}\right)+\dim \mathcal{W} \text{ et } \dim \mathcal{W}=\dim \mathcal{Z}+\dim \overline{\mathcal{V}}.$$

    Donc $\dim \mathcal{V}=\dim \ker\left(\mathcal{V}_{x}\right)+\dim \mathcal{Z}+\dim \overline{\mathcal{V}}$.

15. D'après la question **6.**, il suffit de montrer que si $u \in \mathcal{Z}$, alors $\operatorname{Im}(u) \subset$Vect$(x)$.

    Si $u \in \mathcal{Z}$, alors $\bar{u}=0$ donc pour tout $z \in H$, $\pi \circ u(z)=0$ ce qui est équivalent à $u(z) \in H^{\perp}=$Vect(x).

    D'autre part l'application $\varphi: a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur l'espace vectoriel $\{u \in \mathcal{L}(E): \operatorname{Im}(u) \subset$
    Posons $L=\varphi^{-1}(\mathcal{Z})$, alors, par isomorphisme, on a $\dim \mathcal{Z}=\dim L$ et $\mathcal{Z}=\varphi(L)=\{\varphi(a): a \in L\}=\{a \otimes x: a \in L\}$.

    Soit $y \in L$ et $\varphi(y)=y \otimes x \in \mathcal{Z}$, donc $y \otimes x \in \mathcal{W}$ en particulier $(y \otimes x)(x)=0$ qui se traduit par $(y \mid x) x=0$ avec $x \neq 0$ donc $(y \mid x)=0$.

    On a établit que pour tout $y \in L$, $(y \mid x)=0$. donc $x \in L^{\perp}$.

16. Soit $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$. On a $a \otimes x \in \mathcal{Z}$ donc $a \otimes x \in \mathcal{W}$ en particulier $v=a \otimes x \in \mathcal{V}$.

    D'après le lemme **A**, on a $Tr\left(u^{k} v\right)=0$.

    D'autre part pour tout $z \in E$, $u^{k} \circ v(z)=u^{k}((a \mid z) x)=(a \mid z) u^{k}(x)=\left(a \otimes u^{k}(x)\right)(z)$, donc

$$u^{k} \circ v=a \otimes u^{k}(x)$$

    A l'aide de la question **7,** on a $Tr\left(u^{k} v\right)=Tr\left(a \otimes u^{k}(x)\right)=\left(a \mid u^{k}(x)\right)$ donc $\left(a \mid u^{k}(x)\right)=0$ et ceci pour tout $a \in L$.Donc $u^{k}(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in \mathcal{V}$.

17. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{*}$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V} x$, alors il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x=v(x)$. v est nilpotent donc son spectre est réduit à $\{0\}$ par suite $\lambda=0$ ce qui est absurde.

    On a d'après **16,** $\mathcal{V} x \subset L^{\perp}$ et d'après **17** cette inégalité est stricte puisque $x \in L^{\perp}$ et $x \notin \mathcal{V} x$.

    Donc $\dim \mathcal{V} x<\dim L^{\perp}$ ce qui donne que :

$$\dim \mathcal{V}_{x}+\dim L<\dim L^{\perp}+\dim L=n$$

    Donc $\dim \mathcal{V}_{x}+\dim L \leq n-1$.

18. L'expression de la projection orthogonale sur $H = \text{Vect}(x)^{\perp}$ est : $\pi(z) = z - \dfrac{(z \mid x)}{\|x\|^2} x.$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\pi\left(u^k(z)\right) = u^k(z) - \dfrac{\left(u^k(z) \mid x\right)}{\|x\|^2} x$ donc $u\left(\pi\left(u^k(z)\right)\right) = u^{k+1}(z)$ ($u(x) = 0$ puisque $u \in \mathcal{W}$), ce qui donne que $u\pi u^k = u^{k+1}$ donne $u \circ \overline{u^k} = u^{k+1}$ puis $\pi \circ u \circ \overline{u^k} = \pi \circ u^{k+1}$ ce qui donne $\overline{u} \circ \overline{u^k} = \overline{u^{k+1}}$ ou encore $\overline{u}^{k+1} = \overline{u^{k+1}} = \pi \circ u^{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

u étant nilpotent, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$, et donc $\overline{u}^k = \pi \circ u^k = 0.$

Donc $\overline{u}$ est nilpotent. Ainsi $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$ dont tous les éléments sont nilpotents, c'est-à-dire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à H , on a $\dim \overline{\mathcal{V}} \leq \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}.$

Et d'après les questions **14** et **15,** on a:

$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}} \leq n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

20. Supposons que $\dim \mathcal{V} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, alors l'inégalité précedente est en faite une égalité donc:

$$\frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim L + \dim \overline{\mathcal{V}} \leq n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Puis à l'aide des questions **17** et **19**, on a:

$$0 \leq \dim(\mathcal{V}x) + \dim L - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \dim \overline{\mathcal{V}} \leq 0$$

Donc $\dim(\mathcal{V}x) + \dim L - (n-1) = 0 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - \dim \overline{\mathcal{V}}$ ce qui donne que

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim L = (n-1) \text{ et} \dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

D'autre part par la question **14.** et en utilisant que $\dim \mathcal{Z} = \dim L$, on a

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L = \dim \mathcal{V} - \dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 1$$

Donc $\dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = 1 + \dim \mathcal{V}x + \dim L = n.$

Des question **15** et **16,** on déduit que $\mathcal{V}x + \text{Vect}(x) \subset L^{\perp}$ et cette somme est directe d'après la question **17.** D'autre part, par la question **20,** on a $\dim(\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)) = n - \dim L = \dim L^{\perp}$

Donc $\mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x) = L^{\perp}.$

D'après la question **16,** on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) \in L^{\perp} = \mathcal{V}x \oplus \text{Vect}(x)$.

21. On fait une récurrence sur n , pour $n = 2$ rien à vérifier , supposons que la propriété pour $n-1$.On a $\dim \overline{\mathcal{V}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. D'après **2** et **3.**, il existe un endomorphisme $\overline{u} \in \overline{\mathcal{V}}$ d'indice de nilpotence $n-1$.On a $\overline{u}^{n-2} \neq 0$ donc $u^{n-2} \neq 0$ ($\overline{u}^{n-2} = \pi \circ u^{n-2}$) par suite l'indice de nilpotence de $u > n - 2$ donc nilindice générique de $\mathcal{V}$ est $\geq n - 1$.

Si $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors $L^{\perp} = \text{Vect}(x)$, donc $L = H$.

On a $\dim \overline{\mathcal{V}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence il existe une base $\mathcal{B}_1 = (e_2, e_3, ..., e_n)$ de H dans laquelle tout les éléments de $\overline{\mathcal{V}}$ sont représentés par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ où $e_1 = x$.

Si $u \in \mathcal{V}$, on a $\mathcal{V}x = \{0\}$, donc $u(x) = 0$ et pour $2 \leq i \leq n$, on a $u(e_i) \in$Vect$(e_1, e_2, ..., e_{i-1})$ puisque $\overline{u} \in \overline{\mathcal{V}}$.Donc la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

22. v est nilpotent et $p \geq n-1$, donc d'après la question **5,** $\dim \operatorname{Im}(v^{p-1}) = 1$ et $\operatorname{Im} v^{p-1} =$Vect$(v^{p-1}(x))$

    D'autre part, d'après la question **20,** en prenant $k = p-1$, on a $v^{p-1}(x) \in$Vect$(x) + \mathcal{V}x$.

    Donc $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset$Vect$(x) + \mathcal{V}x$.

23. On choisit $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$ (un tel réel existe puisque $v(x) \neq 0$), puis la question précédente on a
$$\operatorname{Im}(v + tv_0)^{p-1} \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x.$$
    Soit $y \in \operatorname{Im}(v^{p-1})$, $y = v^{p-1}(z)$, à partir d'un certain rang n_0, on a $\left(v + \dfrac{1}{n}v_0\right)(x) \neq 0$

    donc pour tout $n \geq n_0$, $y_n = \left(v + \dfrac{1}{n}v_0\right)^{p-1}(z) \in$Vect$(x) + \mathcal{V}x$.

    D'autre part Vect$(x) + \mathcal{V}x$ est fermé (puisque c'est un espace vectoriel de dimension finie), donc $y = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n \in$Vect$(x) + \mathcal{V}x$ ce qui donne que : $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset$Vect$(x) + \mathcal{V}x$.

24. Si $\forall v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$ c'est fini.

    Sinon il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$, alors d'après **23.** on a pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset$Vect$(x)+$ $\mathcal{V}x$.

    Donc $K(\mathcal{V}) \subset$Vect$(x) + \mathcal{V}x$.

    Par la question **12**, on a $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, puis par le résultat de la question **21** on assure l'existence d'une base base dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire.