Correction

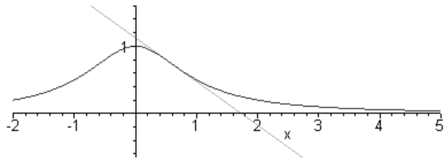
d'après INA ENSA 1993

Partie I

1. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène de solution générale $y(x)=\dfrac{C}{1+x^2}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

2.a φ est paire, il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$. φ est dérivable et $\varphi'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ donc φ décroît sur $\mathbb{R}^+$ de $\varphi(0)=1$ à $\lim\limits_{+\infty}\varphi=0$.

2.b $\varphi''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ s'annule en changeant de signe sur $\mathbb{R}^+$ en $x_0=1/\sqrt{3}$.



(T) a pour équation : $y=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{9}{8}$.

Pour étudier la position relative de (Γ) et de (T), on étudie le signe de $\psi(x)=\varphi(x)-\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{9}{8}\right)$.

ψ est dérivable, $\psi'(x)=\varphi'(x)+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$, $\psi''(x)=\varphi''(x)$.

On en déduit : $\begin{array}{c|ccc} x & & \sqrt{3} & \\ \hline \psi''(x) & - & 0 & + \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} x & & \sqrt{3} & \\ \hline \psi'(x) & + & 0 & + \end{array}$

puis $\begin{array}{c|ccc} x & & \sqrt{3} & \\ \hline \psi(x) & - & 0 & + \end{array}$.

La courbe traverse sa tangente au point d'abscisse $x=\sqrt{3}$, elle d'abord en dessous, ensuite au-dessus.

3.

4. $\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

Partie II

1. Sur $I=\left]0,+\infty\right[$ ou $\left]-\infty,0\right[$, $(E)\Leftrightarrow y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

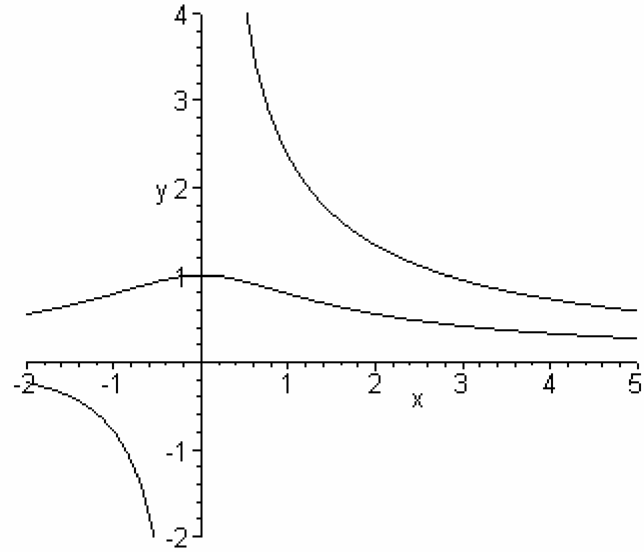
Equation homogène $y'+\dfrac{1}{x}y=0$ de solution $y_0(x)=\dfrac{C'}{|x|}=\dfrac{C}{x}$.

Par variation de la constante, $y_1(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$ est solution particulière.

Solution générale de (E) : $y(x)=\dfrac{C+\arctan x}{x}$.

2.a $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=\left(\arctan\right)'(0)=1$. $\ell=1$.

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f_0'(x)=\dfrac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}$ du signe de $g(x)=x-(1+x^2)\arctan x$.



g est dérivable et $g'(x) = -2x\arctan x \le 0$ donc

x		0	
$g(x)$	$+$	0	$-$

puis

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2.b Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_{-\lambda}(-x) = f_\lambda(x)$.

Les courbes $(C_{-\lambda})$ et (C_λ) sont symétriques par rapport à l'axe (Oy).

2.c Pour tout $x > 0$, $f_{\lambda_1}(x) < f_{\lambda_2}(x)$ et pour tout $x < 0$, $f_{\lambda_1}(x) > f_{\lambda_2}(x)$.

A droite de (Oy), (C_{λ_1}) est en dessous de (C_{λ_2}). C'est l'inverse à gauche de (Oy).

2.d f_λ est dérivable et $f_\lambda'(x) = \dfrac{g_\lambda(x)}{x^2}$ avec $g_\lambda(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \lambda - \arctan x$.

g_λ est dérivable et $g_\lambda'(x) = -\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2} \le 0$ d'où

x	$-\infty$		$+\infty$
$g_\lambda(x)$	$-\lambda+\pi/2$	$\searrow$	$-\lambda-\pi/2$

(et $g_\lambda(0) = -\lambda < 0$)

Si $\lambda \ge \pi/2$ alors

x	$-\infty$		0^-	0^+		$+\infty$
$f_\lambda(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

.

Si $0 < \lambda < \pi/2$ alors g_λ s'annule en un $x_\lambda < 0$ et

x	$-\infty$		x_λ		0^-	0^+		$+\infty$
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	$f_\lambda(x_\lambda)$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0

3.

4.a Soit M un point de coordonnées (a,b) avec $a \ne 0$.

$M \in (C_\lambda) \Leftrightarrow b = f_\lambda(a) \Leftrightarrow \lambda = ab - \arctan a$.

4.b Soit P un point de coordonnées (a,b) avec $a \ne 0$.

La pente en P de la tangente à la courbe (C_λ) passant par P est

$$f_\lambda'(a) = \frac{\dfrac{a}{1+a^2} - \lambda - \arctan a}{a^2} = \frac{\dfrac{1}{1+a^2} - b}{a}.$$

Cette pente est nulle ssi $b = \dfrac{1}{1+a^2}$ i.e. $P \in (\Gamma)$.

4.c Comme ci-dessus, la pente en M de la tangente à la courbe (C_λ) passant par M est $f_\lambda'(a) = \dfrac{\dfrac{1}{1+a^2} - b}{a}$

A droite de l'axe (Oy), cette est positive pour les points en dessous de (Γ) et positive au dessus. A gauche de l'axe (Oy), c'est l'inverse.

Partie III

1.a On peut raisonner par récurrence ou exploiter la sommation géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{2k}=\frac{1-(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}.$$

1.b En intégrant la relation précédente pour u allant de 0 à t, on obtient :

$$\arctan t=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}t^{2k+1}+\varphi(t) \text{ avec } \varphi(t)=(-1)^{n+1}\int_0^t \frac{u^{2(n+1)}}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

$$|\varphi(t)|\leq\int_0^t u^{2(n+1)}\mathrm{d}u=\frac{1}{2n+3}t^{2n+3} \text{ car } \frac{1}{1+u^2}\leq 1.$$

1.c $I=\int_0^1\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t$

donc $I=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}+\int_0^1\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t$ d'où

$$\left|I-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right|=\left|\int_0^1\frac{\varphi(t)}{t}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\mathrm{d}t\leq\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{2n+3}\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Il en découle que $I=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$, on note encore $I=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

2. Pour $n=6$, $\frac{1}{(2n+3)^2}\leq 0{,}5.10^{-2}$ et donc $I=\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ à $0{,}5.10^{-2}$ près, or $\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=0{,}92$ à $0{,}5.10^{-2}$ près, donc $I=0{,}92$ à 10^{-2} près.

L'erreur à éviter est la suivante :

Pour $n=4$, on observe que $I=\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ à 10^{-2} près, mais l'obtention d'une valeur *décimale* de cette somme va réduire la qualité de l'approximation. Par exemple, en écrivant $\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=0{,}92$ à $0{,}5.10^{-2}$ près, on ne peut plus qu'affirmer $I=0{,}92$ à $1{,}5.10^{-2}$ près, ce qui n'est pas suffisant. C'est la raison pour laquelle ci-dessus, on comme par approchée I par une somme à $0{,}5.10^{-2}$ près puis la somme par une valeur décimale à $0{,}5.10^{-2}$ près. Bien sûr, en observant $\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=\frac{91369}{99225}$, on peut affirmer $I=\frac{91369}{99225}$ à 10^{-2} près, ce qui est exact mais ne répond pas à la question, à savoir obtenir une valeur décimale approchée.