Phénomènes de seuil dans les graphes

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

1 ▷ On note m l'endomorphisme canoniquement à M et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(m) = \mathrm{M}$.
On note $\mathcal{B}' = \left(e_{\rho(1)}, \dots, e_{\rho(n)}\right)$ de sorte que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(m) = \left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Ainsi $\boxed{\text{les matrices M et } \left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ sont semblables}}$ car elles représentent m dans deux bases de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathrm{M}_{\mathrm{G},\sigma} = \mathrm{N} = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\rho = (\sigma')^{-1} \circ \sigma$ de sorte que $\rho \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma' \circ \rho = \sigma$.
Ainsi pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a :

$$n_{i,j} = 1 \iff \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in \mathrm{A} \iff \{\sigma'(\rho(i)), \sigma'(\rho(j))\} \in \mathrm{A}$$

D'où $\mathrm{M}_{\mathrm{G},\sigma'} = \left(n_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, ainsi que $\boxed{\mathrm{M}_{\mathrm{G},\sigma} \text{ et } \mathrm{M}_{\mathrm{G},\sigma'} \text{ sont semblables}}$ avec ce qui précède.

2 ▷ Comme pour tout pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $\{i, j\} \in \mathrm{A} \iff \{j, i\} \in \mathrm{A}$.
Donc une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est symétrique réelle.
D'où $\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable}}$ selon le théorème spectral.

3 ▷ Par l'absurde on considère $\mathrm{M}_{\mathrm{G},\sigma} = \mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice d'adjacence d'un graphe non vide de rang 1.
On écrit $\mathrm{M} = (\mathrm{C}_1 \mid \cdots \mid \mathrm{C}_n)$ en colonnes.
Comme M est de rang 1 cela nous fournit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathrm{C}_{i_0} \neq 0$ et $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{C}_1 \mid \cdots \mid \mathrm{C}_n) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{C}_{i_0})$.
Cela nous fournit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{C}_i = \lambda_i \mathrm{C}_{i_0}$.
On remarque que C_{i_0} a un coefficient non nul qui vaut donc 1 ainsi pour $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i est un coefficient de M.
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \in \{0, 1\}$.
Quitte à ré-indexer les sommets, ce qui ne change pas le rang de la matrice d'adjacence selon Q2 car le rang est un invariant de similitude, on suppose que $i_0 = 1$ et que les p premières colonnes sont non nulles ($p \in [\![1, n]\!]$).
de sorte que $\mathrm{C}_1 = \cdots = \mathrm{C}_p$ et $\mathrm{C}_{p+1} = \cdots = \mathrm{C}_n = 0$
Comme les coefficients diagonaux sont nulles les p premiers coefficients de C_1 sont nuls.
Ainsi $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0_{p,p} & 0_{p,n-p} \\ \mathrm{A} & 0_{n-p,n-p} \end{pmatrix}$ matrice par blocs où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$ et $0_{q,r}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.
Comme la matrice $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}$, on a $\mathrm{A} = 0_{n-p,p}$ ainsi M est nulle.
D'où $0 = 1$ ce qui est absurde.
Ainsi $\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1}}$

4 ▷ La réindexation des sommets ne change pas le rangs. On suppose alors que le sommet d'indice 1 est un centre de l'étoile, que les d sommets suivants sont reliés à ce centre et enfin que les $r = n - (d + 1)$ sommets restants sont isolés.

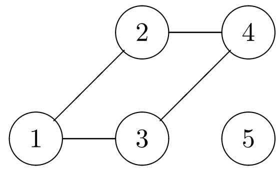
La matrice est alors $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0_{d+1,r} \\ 0_{r,d+1} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

On a bien montré que

$$\boxed{\text{une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2}}$$

On représente un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent :



Graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent

En effet la matrice d'adjacence $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est bien de rang 2 et les sommets non isolés ne forment pas une étoile car aucun sommet non isolé n'est relié à tous les autres non isolés (le sommet « 5 » est inutile).

5 ▷ On note $\mathrm{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A})$ et $\mathrm{G}' = (\mathrm{S}', \mathrm{A}')$ et $d = |\mathrm{S}| = |\mathrm{S}'|$.
Si $d = 0$, alors $1 = \chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{G}'}$. On suppose désormais que $d \in \mathbb{N}^*$.
On considère $\rho : \mathrm{S}' \mapsto \mathrm{S}$ la bijection qui fait de G' une copie de G.
Soit $\sigma : [\![1, d]\!] \mapsto \mathrm{S}$ une indexation du graphe G.
Alors $\sigma' = \rho^{-1} \circ \sigma : [\![1, d]\!] \mapsto \mathrm{S}'$ est une indexation du graphe G'.
On pose la matrice d'adjacence $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathrm{G},\sigma}$. Par définition d'une copie de graphe, on a $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{\mathrm{G}',\sigma'}$.
On obtient $\boxed{\chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{M}} = \chi_{\mathrm{G}'}}$ (valable dans les deux cas)

6 ▷ On note $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice d'adjacence du graphe G. On a $\forall i \in [\![1, n]\!],\ m_{i,i} = 0$ (pas de boucle dans le graphe).
Selon le cours, on a donc :

$$a_{n-1} = -\operatorname{tr}(\mathrm{M}) = -\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = -0$$

Par ailleurs, on a (en notant δ le symbole de Kronecker et ε la signature) :

$$\chi_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}) = \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \det\left(\mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}\right) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right)$$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

• Si σ admet n points fixes alors $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ et $\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right) = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - 0) = \mathrm{X}^n$.

• La permutation σ ne peut pas admettre exactement $n-1$ points fixes.

• Si σ admet exactement $n-2$ points fixes alors σ est une transposition que l'on note $\sigma = (k\,\ell)$ (où $k \neq \ell$ dans $[\![1, n]\!]$).
On a alors : $\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right) = (-1)\mathrm{X}^{n-2}(0 - m_{k,\ell})(0 - m_{\ell,k}) = -m_{k,\ell}m_{\ell,k}\mathrm{X}^{n-2}$.
Ainsi $\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right) = \begin{cases} -\mathrm{X}^{n-2} & \text{si } \{k, \ell\} \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

• Si σ admet moins de $n-3$ points fixes, alors $\deg\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right)\right) \leqslant n-3$.

• • On a alors $\chi_{\mathrm{G}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + \sum_{\sigma \text{ transposition de } \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right) + \mathrm{R}(\mathrm{X})$ avec $\deg(\mathrm{R}(\mathrm{X})) \leqslant n-3$.

Ainsi a_{n-2} est le coefficient dominant (de degré $n-2$) de $\sum_{\sigma \text{ transposition de } \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(\delta_{i,\sigma(i)}\mathrm{X} - m_{i,\sigma(i)}\right)$.

donc $\boxed{a_{n-2} = -|\mathrm{A}| \text{ et } a_{n-1} = 0}$

7 ▷ Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leqslant d \leqslant n-1$.

Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 2$ selon 4. Puis $\dim(\mathrm{E}_0(\mathrm{M})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{M})) = n-2$.

Ainsi 0 est racine de multiplicité au moins $n-2$ de $\chi_{\mathrm{M}} = \chi_{\mathrm{G}}$..

Ainsi $\chi_{\mathrm{G}} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + a_{n-2}\mathrm{X}^{n-2}$ or l'étoile admet exactement d arêtes.

D'où en utilisant 6, $\boxed{\chi_{\mathrm{G}} = \mathrm{X}^n - d\mathrm{X}^{n-2} = \mathrm{X}^{n-2}(\mathrm{X}-\sqrt{d})(\mathrm{X}+\sqrt{d})}$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{0, \sqrt{d}, -\sqrt{d}\}}$

On choisit un indexation comme en Q4, de sorte que : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0_{d+1,r} \\ 0_{r,d+1} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$ où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$.

On note alors $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La famille $(e_3 - e_2, e_4 - e_2, \dots, e_d - e_2, e_{d+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre de $n-2$ vecteurs de $\mathrm{E}_0(\mathrm{M}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$ qui est de dimension $n-2$ ainsi il s'agit d'une base de $\mathrm{E}_0(\mathrm{M})$.

On sait que $\mathrm{E}_{\sqrt{d}}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{E}_{-\sqrt{d}}(\mathrm{M})$ sont des droites car les multiplicités de $\sqrt{d}$ et de $-\sqrt{d}$ valent 1.

Je note $\boxed{\varepsilon = \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon' = \begin{pmatrix} -\sqrt{d} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et avec } d \text{ occurrences de 1 et } n-(d+1) \text{ occurrences de 0}}$

On a $\mathrm{M}\varepsilon = \begin{pmatrix} d \cdot 1 \\ \sqrt{d} \\ \vdots \\ \sqrt{d} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{d}\varepsilon$ et $\mathrm{M}\varepsilon' = \begin{pmatrix} -d \cdot 1 \\ -\sqrt{d} \\ \vdots \\ -\sqrt{d} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{d}\varepsilon'$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{E}_0(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}\,(e_3 - e_2, e_4 - e_2, \dots, e_d - e_2, e_{d+1}, \dots, e_n)\,;\, \mathrm{E}_{\sqrt{d}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon) \text{ et } \mathrm{E}_{-\sqrt{d}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon')}$

8 ▷ On note $n_1 = |\mathrm{S}_1|$ et $n_2 = |\mathrm{S}_2|$. Alors $n = n_1 + n_2 = |\mathrm{S}|$ car S_1 et S_2 sont disjoints.

On indexe les sommets de S_1 en commençant par s_1 et de même pour S_2 et s_2.

On indexe ensuite les sommets de S en commençant par ceux de S_1 puis ceux de S_2 en gardant l'ordre ci-dessus.

On note respectivement M_1, M_2, et M les matrices d'adjacence des graphes G_1, G_2 et G.

En notant $\mathrm{U} = (u_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{R})$ telle que $u_{1,1} = 1$ dont tous les coefficients sont nuls, M est alors donnée par blocs :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & \mathrm{U} \\ \mathrm{U}^\top & \mathrm{M}_2 \end{pmatrix}$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, en notant N_i la matrice d'adjacence de $\mathrm{G}_i \backslash s_i$ en gardant l'ordre d'indexation des sommets, on a

$$\mathrm{M}_i = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{L}_i \\ \mathrm{L}_i^\top & \mathrm{N}_1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{L}_i \in \mathcal{M}_{1,n_i-1}(\mathbb{R})$$

On note en plus $\mathrm{L} = (1\,0 \cdots 0)$ la première ligne de la matrice U

On a alors

$$\chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} \mathrm{XI}_{n_1} - \mathrm{M}_1 & -\mathrm{U} \\ -\mathrm{U}^\top & \mathrm{XI}_{n_2} - \mathrm{M}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -\mathrm{L}_1 & -\mathrm{L} \\ -\mathrm{L}_1{}^\top & \mathrm{XI}_{n_1-1} - \mathrm{N}_1 & 0_{n_1-1,n_2} \\ -\mathrm{L}^\top & 0_{n_2,n_1-1} & \mathrm{XI}_{n_2} - \mathrm{M}_2 \end{vmatrix}$$

En utilisant la linéarité par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_{\mathrm{G}} = \begin{vmatrix} \mathrm{XI}_{n_1} - \mathrm{M}_1 & 0_{n_1,n_2} \\ -\mathrm{U}^\top & \mathrm{XI}_{n_2} - \mathrm{M}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0_{1,n_1-1} & -\mathrm{L} \\ -\mathrm{L}_1{}^\top & \mathrm{XI}_{n_1-1} - \mathrm{N}_1 & 0_{n_1-1,n_2} \\ -\mathrm{L}^\top & 0_{n_2,n_1-1} & \mathrm{XI}_{n_2} - \mathrm{M}_2 \end{vmatrix}$$

Par déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{XI}_{n_1} - \mathrm{M}_1 & 0_{n_1,n_2} \\ -\mathrm{U}^\top & \mathrm{XI}_{n_2} - \mathrm{M}_2 \end{vmatrix} = \det\left(\mathrm{XI}_{n_1} - \mathrm{M}_1\right) \times \det\left(\mathrm{XI}_{n_2} - \mathrm{M}_2\right) = \chi_{\mathrm{G}_1} \times \chi_{\mathrm{G}_2}$$

En notant Δ, le deuxième terme, on a $\chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{G}_1} \times \chi_{\mathrm{G}_2} + \Delta$. Puis en effectuant un développement par rapport à la première ligne et en reconnaissant une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$\Delta = -(-1)^{1+n_1+1} \begin{vmatrix} -\mathrm{L}_1{}^\top & \mathrm{XI}_{n_1-1} - \mathrm{N}_1 & 0_{n_1-1,n_2-1} \\ -1 & 0_{1,n_1-1} & -\mathrm{L}_2 \\ 0_{n_2-1,1} & 0_{n_2-1,n_1-1} & \mathrm{XI}_{n_2-1} - \mathrm{N}_2 \end{vmatrix} = (-1)^{n_1+1} \begin{vmatrix} -\mathrm{L}_1{}^\top & \mathrm{XI}_{n_1-1} - \mathrm{N}_1 \\ -1 & 0_{1,n_1-1} \end{vmatrix} \times \det\left(\mathrm{XI}_{n_2-1} - \mathrm{N}_2\right)$$

Par développement par rapport à la dernière ligne, on a

$$\Delta = (-1)^{n_1+1}(-1)(-1)^{n_1+1} \det\left(\mathrm{XI}_{n_1-1} - \mathrm{N}_1\right) \times \chi_{\mathrm{G}_2 \backslash s_2} = -\chi_{\mathrm{G}_1 \backslash s_1} \times \chi_{\mathrm{G}_2 \backslash s_2}$$

On peut alors conclure que $\boxed{\chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{G}_1} \times \chi_{\mathrm{G}_2} - \chi_{\mathrm{G}_1 \backslash s_1} \times \chi_{\mathrm{G}_2 \backslash s_2}}$

9 ▷ Pour $i \in \{1,2\}$, je note G_i, l'étoile de centre s_i à d_i branches.
On a $\chi_{\mathrm{G}_i} = \mathrm{X}^{d_i+1} - d_i \mathrm{X}^{d_i-1}$ selon 7 car G_i est une étoile à d_i branches ayant $d_i + 1$ sommets.
Par ailleurs, le graphe $\mathrm{G}_i \backslash s_i$ possède d_i sommets et n'a pas d'arêtes. Sa matrice d'adjacence est alors la matrice nulle de $\mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{R})$
d'où $\chi_{\mathrm{G}_1 \backslash s_1} = \mathrm{X}^{d_i}$
Ainsi avec 8, en notant G la double étoile, on a

$$\chi_{\mathrm{G}} = \left(\mathrm{X}^{d_1+1} - d_1 \mathrm{X}^{d_1-1}\right) \times \left(\mathrm{X}^{d_2+1} - d_2 \mathrm{X}^{d_2-1}\right) - \mathrm{X}^{d_1} \times \mathrm{X}^{d_2}$$

Ainsi le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets , constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles est :

$$\boxed{\mathrm{X}^{d_1+d_2+2} - (d_1 + d_2 + 1)\mathrm{X}^{d_1+d_2} + d_1 d_2 \mathrm{X}^{d_1+d_2-2}}$$

En notant M la matrice d'adjacence, M est diagonalisable selon 2
donc la multiplicité de 0 vaut $\dim\left(\mathrm{E}_0(\mathrm{M})\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(\mathrm{M})\right)$.
Ainsi avec le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = d_1 + d_2 + 2 - \dim\left(\mathrm{Ker}(\mathrm{M})\right) = d_1 + d_2 + 2 - (d_1 + d_2 - 2)$.
D'où $\boxed{\text{le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile vaut } d_1 + d_2 + 2 - (d_1 + d_2 - 2) = 4}$

10 ▷ Par indépendance des $\mathrm{X}_{\{i,j\}}$ et à l'aide de la remarque de l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}\left(\{\mathrm{G}\}\right) = \prod_{\{i,j\} \in \mathrm{A}} \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{\{i,j\}} = 1\right) \times \prod_{\{i,j\} \notin \mathrm{A}} \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{\{i,j\}} = 0\right)$$

Comme le graphe G admet a arêtes et $\mathrm{N} = \dbinom{n}{2}$ paires de sommets, on a alors $\boxed{\mathbb{P}\left(\{\mathrm{G}\}\right) = p_n^a q_n^{\mathrm{N}-a}}$
Je note pour $\mathrm{G} = (\mathrm{S}, \mathrm{A}) \in \Omega_n$, $a(\mathrm{G}) = |\mathrm{A}|$. Ainsi $a(\mathrm{G}) \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$ et $\mathbb{P}\left(\{\mathrm{G}\}\right) = p_n^{a(\mathrm{G})} q_n^{\mathrm{N}-a(\mathrm{G})}$
Réciproquement pour $k \in [\![0, \mathrm{N}]\!]$, il y a $\dbinom{\mathrm{N}}{k}$ graphes possédant exactement k arêtes (on choisit k paires parmi les N possibles). Ainsi avec l'union disjointe $\Omega_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\mathrm{N}} \{\mathrm{G} \in \Omega_n \mid a(\mathrm{G}) = k\}$ et la formule du binôme, on a :

$$\mathbb{P}\left(\Omega_n\right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\{\mathrm{G} \in \Omega_n \mid a(\mathrm{G}) = k\}\right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}}{k} p_n^k q_n^{\mathrm{N}-k} = \left(p_n + q_n\right)^{\mathrm{N}}$$

On retrouve bien le fait que $\boxed{\mathbb{P}\left(\Omega_n\right) = 1}$

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

11 ▷ On a l'union disjointe $(X > 0) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X = k)$ donc $\mathbb{P}(X > 0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(X = k)$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X > 0) \leqslant \mathbb{E}(X)}$

12 ▷ On suppose que $\mathbb{E}(X) \neq 0$ alors $\mathbb{E}(X) > 0$ car $X \geqslant 0$. Comme $|0 - \mathbb{E}(X)| = \mathbb{E}(X)$, on a $(X = 0) \subset (|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X))$.

Ainsi par l'inégalité Bienaymé-Tchebychev, on a $\boxed{\mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \mathbb{E}(X)\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2}}$

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ On remarque $A_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_{\{i,j\}}$ (on compte les arêtes).

Comme il s'agit de la somme de N variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n, on a alors $\boxed{A_n \sim \mathcal{B}(N, p_n)}$ loi binomiale de paramètre (N, p_n).

14 ▷ On suppose que $p_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Ainsi A_n est à valeurs dans $[\![0, N]\!]$ et admet une espérance $\mathbb{E}(A_n) = Np_n$ et une variance, on peut donc utiliser 11.

Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $N \sim \dfrac{n^2}{2}$ d'où $\mathbb{E}(A_n) = Np_n \sim \dfrac{n^2 p_n}{2} = o(1)$ et donc $\mathbb{E}(A_n) \longrightarrow 0$. Or

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(A_n > 0\right) \leqslant \mathbb{E}(A_n)$$

D'où avec les gendarmes, on a alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(A_n > 0\right) = 0}$

15 ▷ Quand $n \longrightarrow +\infty$, on suppose que $\dfrac{1}{n^2} = o\left(p_n\right)$. Comme A_n est positive, on a $\mathbb{P}\left(A_n > 0\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A_n = 0\right)$.

On peut encore appliquer 12 avec des réels $\geqslant 0$ et comme $0 < q_n < 1$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(A_n = 0\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(A_n)}{\left(\mathbb{E}\left(A_n\right)\right)^2} = \frac{Np_n q_n}{\left(Np_n\right)^2} = \frac{Nq_n}{np_n} \leqslant \frac{1}{Np_n}$$

On a $N \sim \dfrac{n^2}{2}$; donc

$$\frac{1}{Np_n} \sim \frac{2}{p_n n^2} = 2\frac{1/n^2}{p_n} \longrightarrow 0$$

ainsi $\mathbb{P}\left(A_n = 0\right) \longrightarrow 0$, selon les gendarmes. Alors on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(A_n > 0\right) = 1}$

16 ▷ L'événement $\{A_n > 0\}$ signifie que le graphe admet au moins une arête.

$$\boxed{\text{La propriété } \mathcal{P}_n \text{ : « le graphe de } \Omega_n \text{ admet au moins une arête » admet } (t_k) = \left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geqslant 2} \text{ comme fonction de seuil}}$$

Partie III - Fonction de seuil de la copie d'un graphe

17 ▷ Comme $S_H \subset [\![1, n]\!] = S$ alors pour $G = (S, A) \in \Omega_n$, on a :

$$X_H(G) = 1 \iff H \subset G \iff A_H \subset A \iff \forall\{i, j\} \in A_H,\ \{i, j\} \in A \iff \forall\{i, j\} \in A_H,\ X_{\{i,j\}}(G) = 1$$

Avec l'indépendance des $X_{\{i,j\}}$, on a :

$$\mathbb{E}(X_H) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\{i,j\}\in A_H} \left(X_{\{i,j\}} = 1\right)\right) = \prod_{\{i,j\}\in A_H} \mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 1)$$

Tous les termes du produit valent p_n et il y en a_H. Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_H) = p_n^{a_H}}$

18 ▷ Choisir un élément de $\mathcal{C}_0$ consiste à faire le choix de l'ensemble des sommets puis faire celui de la distribution des arêtes.

Ainsi $\boxed{|\mathcal{C}_0| = \binom{n}{s_0} \times c_0 = c_0 \dfrac{n!}{s_0! \cdot (n-s_0)!}}$

En s'autorisant toutes les permutations des s_0 sommets du graphe mais en « fixant » les arêtes, on obtient toutes les copies du graphe G_0 (en plusieurs exemplaires) dont l'ensemble des sommets est S'_0.

Ainsi $c_0 \leqslant s_0!$ et donc

$$|\mathcal{C}_0| \leqslant \frac{n!}{(n-s_0)!} = \prod_{i=0}^{s_0-1} (n-i) \leqslant \prod_{i=0}^{s_0-1} n$$

Ainsi $\boxed{\text{le cardinal de } \mathcal{C}_0 \text{ est inférieur à } n^{s_0}}$

19 ▷ On a clairement $\boxed{\mathrm{X}_n^0 = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathrm{X}_\mathrm{H}}$

Au vu de l'énoncé, dans cette question et les suivantes, la lettre G *devrait être interprétée comme une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\mathcal{E}_n$. Ainsi*

$$\mathrm{G} \sim \mathcal{U}(\Omega_n)$$

Formellement G *peut être vu comme l'application identité de* Ω_n *et l'événement* $(\mathrm{H} \subset \mathrm{G})$ *est* $\{\mathrm{G} \in \Omega_n \mid \mathrm{H} \subset \mathrm{G}\}$.

D'une part comme $\mathrm{X}_\mathrm{H} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(\mathrm{H} \subset \mathrm{G}))$, on a $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right) = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{H}) = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathbb{P}(\mathrm{H} \subset \mathrm{G})$.

D'autre part, comme $\forall \mathrm{H} \in \mathcal{C}_0,\ a_\mathrm{H} = a_0$ et à l'aide de 17, on a

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right) = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{H}) = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} p_n^{a_0} = |\mathcal{C}_0| \cdot p_n^{a_0}$$

On peut alors conclure avec 18 que $\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right) = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathbb{P}(\mathrm{H} \subset \mathrm{G}) \leqslant n^{s_0} p_n^{a_0}}$

20 ▷ On remarque que ω_0 est bien défini car l'ensemble des sous-graphes H de G tel que $a_\mathrm{H} \geqslant 1$ est un ensemble fini non vide.

On considère alors $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{G}_0$ et $a_{\mathrm{H}_0} \geqslant 1$ réalisant le minimum ω_0.

Ainsi en notant $\alpha_0 = a_{\mathrm{H}_0}$ et $\sigma_0 = s_{\mathrm{H}_0}$, on a $\omega_0\alpha_0 = \sigma_0$.

On considère Y_n^0 la variable aléatoire sur Ω_n qui compte le nombre de copie de H_0.

En appliquant 19 à H_0 au lieu de G_0, on a alors $0 \leqslant \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_n^0\right) \leqslant n^{\sigma_0} p_n^{\alpha_0}$.

On suppose que $p_n = \mathrm{o}\left(n^{-\omega_0}\right)$, alors

$$n^{\sigma_0} p_n^{\alpha_0} = o\left(n^{\sigma_0 - \omega_0\alpha_0}\right) = o(1)$$

Avec 11, comme en 14, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_n^0 > 0\right) = 0$.

Comme $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{G}_0$, on a $\left(\mathrm{X}_n^0 > 0\right) \subset \left(\mathrm{Y}_n^0 > 0\right)$ car toute copie de G_0 en contient une de H_0.

Puis $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n^0 > 0\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_n^0 > 0\right)$, on conclut alors que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n^0 > 0\right) = 0}$

21 ▷ En reprenant 19, on a

$$\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2 = \left(\sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathrm{X}_\mathrm{H}\right)^2 = \left(\sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathrm{X}_\mathrm{H}\right) \times \left(\sum_{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0} \mathrm{X}_{\mathrm{H}'}\right) = \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} \mathrm{X}_\mathrm{H}\mathrm{X}_{\mathrm{H}'}$$

On considère sans doute ici que l'union et l'intersection des graphes $\mathrm{H} = (\mathrm{S}_\mathrm{H}, \mathrm{A}_\mathrm{H})$ et $\mathrm{H}' = (\mathrm{S}_{\mathrm{H}'}, \mathrm{A}_{\mathrm{H}'})$ est défini par :

$$\mathrm{H} \cup \mathrm{H}' = (\mathrm{S}_\mathrm{H} \cup \mathrm{S}_{\mathrm{H}'}, \mathrm{A}_\mathrm{H} \cup \mathrm{A}_{\mathrm{H}'}) \quad \text{et} \quad \mathrm{H} \cap \mathrm{H}' = (\mathrm{S}_\mathrm{H} \cap \mathrm{S}_{\mathrm{H}'}, \mathrm{A}_\mathrm{H} \cap \mathrm{A}_{\mathrm{H}'})$$

Ceci n'est pas formellement défini dans l'énoncé mais cela définit effectivement des graphes.

La variable aléatoire X_H est l'indicatrice de l'événement $\{\mathrm{H} \subset \mathrm{G}\}$ et il en est de même pour H'.

Ainsi $\mathrm{X}_\mathrm{H}\mathrm{X}_{\mathrm{H}'}$ est la variable aléatoire indicatrice de l'événement $\{\mathrm{H} \subset \mathrm{G}\} \cap \{\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}\}$.

On remarque que $\{\mathrm{H} \subset \mathrm{G}\} \cap \{\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}\} = \{\mathrm{H} \cup \mathrm{H}' \subset \mathrm{G}\}$.
Ainsi : $\mathrm{X_H X_{H'}} = \mathrm{X_{H\cup H'}}$ (le produit de deux indicatrices est celle de l'intersection). D'où

$$\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2\right) = \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_H X_{H'}}\right) = \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_{H\cup H'}}\right)$$

Comme $a_{\mathrm{H\cup H'}} = a_{\mathrm{H}} + a_{\mathrm{H'}} - a_{\mathrm{H\cap H'}} = 2a_0 - a_{\mathrm{H\cap H'}}$ et à l'aide de 17, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2\right) = \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{P}\left(\mathrm{H}\cup\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}\right) = \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} p_n^{2a_0 - a_{\mathrm{H\cap H'}}}}$$

22 ▷ En reprenant les remarques de 21, on a $\Sigma_0 = \sum_{\substack{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2 \\ s_{\mathrm{H\cap H'}}=0}} \mathbb{P}(\mathrm{H}\cup\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}) \leqslant \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_H X_{H'}}\right)$

Soit H et $\mathrm{H}' \in \mathcal{C}_0$ tel que $s_{\mathrm{H\cap H'}} = 0$. Alors par lemme des coalitions et indépendance des $\mathrm{X}_{i,j}$, on a $\mathrm{X_H} \perp\!\!\!\perp \mathrm{X_{H'}}$. Ainsi

$$\Sigma_0 \leqslant \sum_{(\mathrm{H},\mathrm{H}')\in\mathcal{C}_0^2} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_H}\right)\cdot\mathbb{E}\left(\mathrm{X_{H'}}\right) = \left(\sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_H}\right)\right)\cdot\left(\sum_{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_{H'}}\right)\right) = \left(\mathbb{E}\left(\sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \mathrm{X_H}\right)\right)^2$$

Avec 19, on peut alors conclure que $\boxed{\Sigma_0 \leqslant \left(\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)\right)^2}$

23 ▷ On a $\Sigma_k = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \sum_{\substack{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{\mathrm{H\cap H'}}=k}} \mathbb{P}(\mathrm{H}\cup\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}) = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \sum_{\substack{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{\mathrm{H\cap H'}}=k}} \mathbb{E}\left(\mathrm{X_{H\cup H'}}\right)$

Soit $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \in \mathcal{C}_0$ tels que $s_{\mathrm{H\cap H'}} = k$. On a $a_{\mathrm{H\cup H'}} = a_{\mathrm{H}} + a_{\mathrm{H'}} - a_{\mathrm{H\cap H'}} = 2a_0 - a_{\mathrm{H\cap H'}}$.
Or si $a_{\mathrm{H\cap H'}} \geqslant 1$, on a $\dfrac{s_{\mathrm{H\cap H'}}}{a_{\mathrm{H\cap H'}}} \geqslant \omega_0 > 0$ car $\mathrm{H}\cap\mathrm{H}' \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{G}_0$.
Ainsi $a_{\mathrm{H\cap H'}} \leqslant \dfrac{s_{\mathrm{H\cap H'}}}{\omega_0} = \dfrac{k}{\omega_0}$ et ceci est valable même si $a_{\mathrm{H\cap H'}} = 0$.
donc $a_{\mathrm{H\cup H'}} \geqslant 2a_0 - \dfrac{k}{\omega_0}$. Comme $t \mapsto p_n^t$ est décroissante et selon 17, on a

$$\Sigma_k = \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \sum_{\substack{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{\mathrm{H\cap H'}}=k}} p_n^{a_{\mathrm{H\cup H'}}} \leqslant \sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \sum_{\substack{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{\mathrm{H\cap H'}}=k}} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$$

Pour $\mathrm{H} \in \mathcal{C}_0$, le nombre de parties $\mathrm{S}_0' \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal s_0 telles que $|\mathrm{S_H} \cap \mathrm{S}_0'| = k$ vaut $\dbinom{s_0}{k}\dbinom{n-s_0}{s_0-k}$ (on choisit les k sommets dans $\mathrm{S_H}$ puis les $s_0 - k$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \mathrm{S_H}$).
Pour une telle partie S_0', il y a c_0 copies de G_0 de la forme $(\mathrm{S}_0', \mathrm{A}_0')$. Ainsi $\displaystyle\sum_{\substack{\mathrm{H}'\in\mathcal{C}_0 \\ s_{\mathrm{H\cap H'}}=k}} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}} = \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}$

On peut alors conclure que $\boxed{\Sigma_k \leqslant \displaystyle\sum_{\mathrm{H}\in\mathcal{C}_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}}$

24 ▷ On a $q!\dbinom{r}{q} r^{-q} = \dfrac{r!}{(r-q)!r^q} = \displaystyle\prod_{i=0}^{q-1} \frac{r-i}{r} \geqslant \left(\frac{r-q+1}{r}\right)^q = \left(1 - \frac{q-1}{r}\right)^q$.
Or $1 - \dfrac{q-1}{r} \geqslant 1 - \dfrac{q-1}{q} = \dfrac{1}{q} > 0$ car $r \geqslant q > 0$ et $q - 1 \geqslant 0$.
Comme $t \mapsto \dfrac{t^q}{q!}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$,
on a bien $\boxed{\dbinom{r}{q} r^{-q} \geqslant \dfrac{1}{q!}\left(1 - \dfrac{q-1}{q}\right)^q}$

À l'aide de 23, on a $0 \leqslant \Sigma_k \leqslant |\mathcal{C}_0| \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$.

De plus selon 18 et 19, $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2 = |\mathcal{C}_0|^2 p_n^{2a_0}$. Ainsi avec 20 et en minorant $\binom{n}{s_0}$, on a

$$0 \leqslant \frac{\Sigma_k}{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2} \leqslant \frac{\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\binom{n}{s_0}} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \leqslant \binom{s_0}{k} \frac{\binom{n-s_0}{s_0-k}}{\frac{n^{s_0}}{s_0!}\left(1-\frac{s_0-1}{s_0}\right)^{s_0}} \times p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} \leqslant \mathrm{K}\frac{(n-s_0)!}{n^{s_0}(n+k-2s_0)!} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

avec K constante indépendante de n.

Or $0 \leqslant \dfrac{(n-s_0)!}{(n+k-2s_0)!} = \displaystyle\prod_{i=0}^{s_0-k-1}(n-s_0-i) \leqslant n^{s_0-k}$ d'où

$$0 \leqslant \frac{\Sigma_k}{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2} \leqslant \mathrm{K} n^{-k} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

Par hypothèse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\omega_0}p_n^{-1} = 0$ ainsi $p_n^{-1} = o\left(n^{\omega_0}\right)$ et donc $p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} = o\left(n^k\right)$.

On en déduit que $\boxed{\text{pour } k \in [\![1, s_0]\!] \text{, on a } \Sigma_k = o\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2\right) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

25 ▷ Selon Huygens, on $\mathbb{V}\left(\mathrm{X}_n^0\right) = \mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2$.

À l'aide de 21 et par définition des Σ_k, on a $\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{s_0}\Sigma_k$.

Ainsi avec 22, on a

$$0 \leqslant \mathbb{V}\left(\mathrm{X}_n^0\right) = \sum_{k=0}^{s_0}\Sigma_k - \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{s_0}\Sigma_k$$

Ainsi avec 24, on a $\mathbb{V}\left(\mathrm{X}_n^0\right) = o\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)^2\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, par somme finie.

En conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathbb{V}\left(\mathrm{X}_n^0\right)}{\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n^0\right)\right)^2} = 0}$

26 ▷ À l'aide de 25 et 12, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n^0 = 0\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_n^0 > 0\right) = 1$ comme en 15.

Ainsi avec 20, la suite $(n^{-\omega_0})$ est un fonction de seuil pour la propriété $\left(\mathrm{X}_n^0(\mathrm{G}) > 0\right)$

On conclut que $\boxed{\text{la suite } (k^{-\omega_0})_{k\geqslant 2} \text{ est une fonction de seuil pour la propriété } \mathcal{P}_n}$

27 ▷ Un graphe possède une arête si et seulement si il contient une copie du graphe $\mathrm{G}_0^{(1)} = (\mathrm{S}_1, \mathrm{A}_1) = (\{0,1\}, \{\{0,1\}\})$.

Or $\left\{\mathrm{H} \subset \mathrm{G}_0^{(1)} \mid a_\mathrm{H} \geqslant 1\right\} = \{\mathrm{G}_0^{(1)}\}$ ainsi dans ce cas $\omega_0^{(1)} = \min\limits_{\substack{\mathrm{H}\subset\mathrm{G}_0^{(1)}\\ a_\mathrm{H}\geq 1}} \dfrac{s_\mathrm{H}}{a_\mathrm{H}} = \dfrac{s_{\mathrm{G}_0^{(1)}}}{a_{\mathrm{G}_0^{(1)}}} = 2$.

donc la suite $\left(k^{-2}\right)_{k\geqslant 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété "le graphe $\mathrm{G} \in \Omega$ possède au moins une arête".

On $\boxed{\text{retrouve ainsi le résultat de la question 16}}$ et ce cas correspond à l'étoile à une branche.

On note $\mathrm{G}_0^{(d)} = (\mathrm{S}_d, \mathrm{A}_d)$ une étoile à d branches de centre 0 où $\mathrm{S}_d = [\![0, d]\!]$.

Soit $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}_0^{(d)}$ tel que $a_\mathrm{H} \geqslant 1$. Alors nécessairement $0 \in \mathrm{S}_\mathrm{H}$ et $a_\mathrm{H} + 1 = s_\mathrm{H}$ d'où $\dfrac{s_\mathrm{H}}{a_\mathrm{H}} = 1 + \dfrac{1}{a_\mathrm{H}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{d}$.

De plus $\dfrac{s_{\mathrm{G}_0^{(d)}}}{a_{\mathrm{G}_0^{(d)}}} = 1 + \dfrac{1}{d}$ et donc $\omega_0^{(d)} = 1 + \dfrac{1}{d}$

$\boxed{\text{La suite } \left(k^{-1-1/d}\right)_{k\geqslant 2} \text{ est une fonction de seuil pour la propriété « contenir une copie de l'étoile à } d \text{ branches »}}$

Ceci généralise le cas d'une seule branche.