CPGE MOHAMMEDIA **29 Avril 2018**

CENTRALE.SUPÉLEC - M1 - MPSI

Corrigé par Taoufiki said

Q1. On a : $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$ et $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle$ donc

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

Autrement dit, la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme basé sur les vecteurs a et b est égale au double de la somme des carrés de deux normes $\|a\|$ et $\|b\|$.

Q2. Posons $a = u - v$ et $b = u - v'$.
On a : $\|a\| = \|b\|$, par **Q1**, on écrit

$$\|2u - (v+v')\|^2 + \|v - v'\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = 4\|u-v\|^2$$

puisque $\|v - v'\| > 0$ alors $\|u - v\| > +\|u - \frac{v+v'}{2}\|$.

Q3. Notons $d = \inf\limits_{w \in F} \|u - w\|$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de F vérifiant

$$d = \lim_{n\to+\infty} \|u - w_n\|$$

Cette suite est bornée (car $\|w_n\| \leq \|u\| + \|u - w_n\|$), par Bolzano-Weierstrass (on est en dimension finie), elle admet une suite extraite (v_n) convergente vers $v \in \overline{F} = F$ (F est fermé).
Par continuité de l'application $x \mapsto \|x - u\|$, on écrit

$$\|v - u\| = \lim_{n\to+\infty} \|v_n - u\| = d$$

d'où la propriété cherchée.

Q4. L'existence est déjà vue en **Q3**. Pour l'unicité, on suppose qu'il existe un autre vecteur $v' \in C$ vérifiant la propriété.
Par convexité de C, $\frac{v+v'}{2} \in C$ et par **Q2**, on a :

$$\|u - v\| > +\|u - \frac{v+v'}{2}\|$$

ce qui est absurde.
Q5. Par concavité de logarithme, on a :

$$\ln(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln ab$$

par croissance de l'exponentielle, on obtient :

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Q6. Posons $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_m\}$.
Si $\mathbb{E}(|X|^p) = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \mathbb{P}(X = x_i) = 0$ donc
pour tout $i = 1, ..., n$, $x_i \neq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = x_i) = 0$
puis $X = 0$ presque sûrement puis $|XY|$ l'est aussi et par suite l'inégalité est vérifiée. De même, si $\mathbb{E}(|Y|^q) = 0$.
On suppose que $\mathbb{E}(|X|^p) \neq 0$ et $\mathbb{E}(|Y|^q) \neq 0$. Quitte à remplacer X et Y par $\widetilde{X} = \frac{X}{\mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}}$ et $\widetilde{Y} = \frac{Y}{\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}}$, on peut supposer que $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XY|) &= \sum_{i,j} |x_i||y_j|\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&\leq \sum_{i,j} \left(\frac{|x_i|^p}{p}+\frac{|y_j|^q}{q}\right)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}|y_j|^q\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\mathbb{P}(X = x_i) + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}|y_j|^q\mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{p}+\frac{\mathbb{E}(|Y|^q)}{q} \\
&= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \\
&= \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}
\end{aligned}$$

Q7. On a $X(\Omega)$ est fini, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X=x|A_i)\mathbb{P}(A_i) && \text{(Probabilités totales)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x|A_i) && \text{(Les deux sommes sont finies)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X|A_i)
\end{aligned}$$

Q8. On pose : $I=\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X|\geq t)dt$. On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{[0,\sqrt{y_1}]} t\mathbb{P}(|X|\geq t)dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{]\sqrt{y_i},\sqrt{y_{i+1}}]} t\mathbb{P}(|X|\geq t)dt + \int_{[\sqrt{y_n},+\infty[} t\mathbb{P}(|X|\geq t)dt \\
&= \int_{[0,\sqrt{y_1}]} t\mathbb{P}(X^2\geq y_1)dt + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{]\sqrt{y_i},\sqrt{y_{i+1}}]} t\mathbb{P}(X^2\geq y_{i+1})dt + \int_{]\sqrt{y_n},+\infty[} t\mathbb{P}(X^2> y_n)dt \\
&= 1.\int_{[0,\sqrt{y_1}]} tdt + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X^2\geq y_{i+1})\int_{]\sqrt{y_i},\sqrt{y_{i+1}}]} tdt + 0.\int_{]\sqrt{y_n},+\infty[} tdt \\
&= \frac{y_1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X^2\geq y_{i+1})\frac{y_{i+1}-y_i}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X^2=y_i)y_i \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2)
\end{aligned}$$

Q9. D'après **Q8** et l'hypothèse sur X, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X|\geq t)dt \\
&\leq 2a\int_0^{+\infty} t\exp(-bt^2)dt = -\frac{a}{b}\left[\exp(-bt^2)\right]_0^{+\infty} = \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Q10. Soit $t\in\mathbb{R}$. Si x est un réel qui vérifie $|x+\delta|\geq t$ alors

$$|x|\geq|x+\delta|-|\delta|\geq t-|\delta|$$

donc $\quad \{\omega \in \Omega \ , \ |X(\omega)+\delta| \geq t\} \ \subseteq \ \{\omega \in \Omega \ , \ |X(\omega)| \geq t-|\delta|\}$
puis $\quad \mathbb{P}(|X+\delta| \geq t) \ \leq \ \mathbb{P}(|X| \geq t-|\delta|)$.
Q11. Le discriminant du trinôme $b(t-|\delta|)^2+a-\frac{1}{2}bt^2$ est égal à $2b^2(\delta^2-\frac{a}{b}) \leq 0$.
D'où $\quad -b(t-|\delta|)^2 \leq a-\frac{1}{2}bt^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Q12. Soit $t \geq |\delta|$. On a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(|X+\delta| \geq t) & \leq & \mathbb{P}(|X| \geq t-|\delta|) & (\text{ par } \mathbf{Q10}) \\ & \leq & a\exp(-b(t-|\delta|)^2) & (\text{ car } t-|\delta| \geq 0) \\ & \leq & a\exp(a-\dfrac{1}{2}bt^2) & (\text{ par } \mathbf{Q11}) \\ & \leq & ae^a\exp(-\dfrac{bt^2}{2}) & \end{array}$$

Q13. On a : $1=\mathbb{P}(|X| \geq 0) \leq a\exp(-\frac{b.0^2}{2})=a$, donc, pour $t \in [0,|\delta|[$, on a :

$$\begin{array}{rcl} a\exp(a)\exp(-\dfrac{b.t^2}{2}) & \geq & a\exp(a)\exp(-\dfrac{b.\delta^2}{2}) \\ & \geq & a\exp(a)\exp(-\dfrac{b}{2}\dfrac{a}{b}) \\ & \geq & a\exp(\dfrac{a}{2}) \\ & \geq & 1 \\ & \geq & \mathbb{P}(|X+\delta| \geq t) \end{array}$$

Q14. Si $C \cap X(\Omega)=\emptyset$ alors $\mathbb{P}(X \in C)=0$ donc l'inégalité s'écrit

$$0.\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)\right)\right) \leq 1.$$

Q15. Posons $u=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $Y_i=\left(\frac{u_i-\varepsilon_i}{2}\right)^2$ pour $i=1,...,n$.
Les variables aléatoires $Y_1,...,Y_n$ sont indépendantes car $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ le sont. En plus, elles suivent toutes la loi $B(\frac{1}{2})$, donc leur somme $\frac{1}{4}d(X,u)^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi $B(n,\frac{1}{2})$.

Q16. Par formule de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n} e^{k/2} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{e^{1/2}}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{e^{1/2}+1}{2}\right)^n \\
&\leq \left(\frac{3+1}{2}\right)^n = 2^n
\end{aligned}$$

Q17. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a :

$$d(x,C) = \inf_{y \in C}(d(x,y)) \leq d(x,u) \quad \text{car } u \in C$$

D'où $\quad d(X,C) \leq d(X,u)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in C) &= \mathbb{P}(X = u) \\
&= \mathbb{P}(\frac{1}{4}d(X,u)^2 = 0) \\
&= 2^{-n}
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X \in C).\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) \leq \mathbb{P}(X \in C).2^n = 1$$

Q18. Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient deux vecteurs $\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i + e_n$ et $\zeta' = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i - e_n$ où les coordonnées $u_1, ..., u_{n-1}$ sont des ± 1.

Si $n = 1$ alors $\zeta = e_1$ et $\zeta' = -e_1$ et $X(\Omega) = \{\zeta, \zeta'\}$ puis $\mathbb{P}(X \in C) = 1$ et $d(X,C) = 0$, d'où c'est un cas d'égalité.

Q19. Soit $x' \in E'$ et $t \in \{-1, 1\}$.

$\Rightarrow$) Si $x' \in C_t$ alors, il s'écrit $x' = \pi(a + te_n)$ avec $a + te_n \in C$ et $a \in E'$ sous ces conditions, on a $\pi(a + te_n) = a$ d'où $x' + te_n = a + te_n \in C$.

$\Leftarrow$) Supposons que $x' + te_n \in C$. On a $x' \in E'$ donc $x' + te_n \in H_t$ puis $x' + te_n \in C \cap H_t$

comme $\pi(x' + te_n) = x'$ alors $x' \in \pi(C \cap H_t) = C_t$.

Q20. On rappelle que $\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i + e_n$ et $\zeta' = \sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i - e_n$ sont dans $X(\Omega) \cap C$

• On a : $\zeta \in C_1$ et $\zeta' \in C_{-1}$ donc ils sont non vides.
• Soient $t \in \{-1,1\}$, $x', y' \in C_t$ et $\lambda \in]0,1[$. Par **Q19**, $x' + te_n \in C$ et $y' + te_n \in C$ puis $\lambda(x' + te_n) + (1-\lambda)(y' + te_n) \in C$ (car C est convexe), c.à.d. $\lambda x' + (1-\lambda)y' + te_n \in C$ puis $\lambda x' + (1-\lambda)y' \in C_t$ (par **Q19**). D'où la convexité de C_t.
• Soit $(x'_i)_i$ une suite d'éléments de C_t qui converge vers x'. La suite $(x'_i + te_n)_i \in C^{\mathbb{N}}$ converge vers $x' + te_n$ lorsque i tend vers $+\infty$, puisque C est fermé, alors $x' + te_n \in C$ puis $x' \in C_t$, d'où C_t est fermé.
Q21.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in C) &= \mathbb{P}(X \in C | X' \in C_1)\mathbb{P}(X' \in C_1) + \mathbb{P}(X \in C | X' \in C_{-1})\mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1)\mathbb{P}(X' \in C_1) + \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1)\mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})
\end{aligned}$$

Q22. Soit $\omega \in \Omega$. On a $Y_{\varepsilon_n(\omega)} \in C_{\varepsilon_n(\omega)}$ et $Y_{-\varepsilon_n(\omega)} \in C_{-\varepsilon_n(\omega)}$
donc $Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)e_n \in C$ et $Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)e_n \in C$
par convexité de C, on a : $(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)e_n) \in C$
d'où $d(X(\omega), C) \leq \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n(\omega)} + \varepsilon_n(\omega)e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n(\omega)} - \varepsilon_n(\omega)e_n) - X\|$.
Ceci pour tout $\omega \in \Omega$, d'où le résultat cherché.
Q23. Notons $N = \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - X\|^2$. On a :

$$\begin{aligned}
N &= \|(1-\lambda)Y_{\varepsilon_n} + \lambda Y_{-\varepsilon_n} + (1-\lambda)\varepsilon_n e_n - \lambda\varepsilon_n e_n - X' - \varepsilon_n e_n\|^2 \\
&= \|\underbrace{(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')}_{\in E'} - \underbrace{2\lambda\varepsilon_n e_n}_{\in E'^{\perp}}\|^2 \\
&= \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + \|2\lambda\varepsilon_n e_n\|^2 \qquad \text{(Théorème de Pythagore)} \\
&= \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + 4\lambda^2
\end{aligned}$$

d'où

$$d(X,C)^2 \leq \|(1-\lambda)(Y_{\varepsilon_n} - X') + \lambda(Y_{-\varepsilon_n} - X')\|^2 + 4\lambda^2$$

Pour l'autre inégalité, on pose : $\chi = Y_{\varepsilon_n} - X'$, $\psi = Y_{-\varepsilon_n} - X'$
et $D = \|(1-\lambda).\chi + \lambda.\psi\|^2 - (1-\lambda)\|\chi\|^2 - \lambda\|\psi\|^2$. On a :

$$\begin{aligned}
D &= (1-\lambda)^2\|\chi\|^2 + \lambda^2\|\psi\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\chi,\psi\rangle - (1-\lambda)\|\chi\|^2 - \lambda\|\psi\|^2 \\
&= -\lambda(1-\lambda)\left(\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\langle\chi,\psi\rangle\right) \\
&= -\lambda(1-\lambda)\|\chi - \psi\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Q24. On a :

$$\begin{array}{rcl} (X' \in C_{-1}) & = & \{\omega \in \Omega \ , \ X'(\omega) \in C_{-1}\} \\ & = & \{\omega \in \Omega \ , \ X'(\omega) - e_n \in C\} \\ & = & \{\omega \in \Omega \ , \ \varepsilon_n(\omega) = -1\} \\ & \supseteq & \{\omega \in \Omega \ , \ X(\omega) = \zeta'\} \end{array}$$

Comme $\zeta' \in X(\Omega)$ alors $p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \geq \mathbb{P}(X = \zeta') > 0$. **Q25.** Soit $\lambda \in [0, 1]$.
Pour $\omega \in \Omega$ tel que $\varepsilon_n(\omega) = -1$, on a :

$$\frac{1}{8} d(X(\omega), C)^2 \leq \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1-\lambda}{8} d(X'(\omega), C_{-1})^2 + \frac{\lambda}{8} d(X'(\omega), C_1)^2 \qquad (\text{ par } \mathbf{Q.23} \text{ })$$

puis

$$\exp\left(\frac{1}{8} d(X(\omega), C)^2\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left[\exp\left(\frac{1}{8} d(X'(\omega), C_{-1})^2\right)\right]^{1-\lambda} \left[\exp\left(\frac{1}{8} d(X'(\omega), C_1)^2\right)\right]^{\lambda}$$

La croissance et la linéarité de l'espérance permettent d'obtenir l'inégalité cherchée.
Q26. Supposons que $0 < \lambda < 1$ (l'inégalité est triviale pour $\lambda = 0$ ou 1)
et posons $A = \left[\exp\left(\frac{1}{8} d(X'(\omega), C_{-1})^2\right)\right]^{1-\lambda}$, $B = \left[\exp\left(\frac{1}{8} d(X'(\omega), C_1)^2\right)\right]^{\lambda}$,
$p = \frac{1}{1-\lambda}$ et $q = \frac{1}{\lambda}$.
On a : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $A, B \geq 0$ donc

$$\mathbb{E}(AB) \leq \mathbb{E}(A^p)^{1/p} \mathbb{E}(B^q)^{1/q} \qquad (\text{ par } \mathbf{Q.6})$$

d'où l'inégalité cherchée.
Q27. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\varepsilon(\omega) = 1$. On a : $X(\omega) = X'(\omega) + e_n$.
Soit $x' \in E'$ tel que $x' \in C_1$ et $d(X'(\omega), C_1) = \|X'(\omega) - x'\|$.
D'après **Q19**, $x' + e_n \in C$ et $\|X(\omega) - (x' + e_n)\| = \|X'(\omega) - x'\| = d(X'(\omega), C_1)$,
donc $d(X'(\omega), C_1) \geq d(X(\omega), C)$, d'où

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right) | \varepsilon_n = 1\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X', C_1)^2\right)\right)$$

Par H.R. $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X', C_1)^2\right)\right) .p_+ \leq 1$, d'où l'inégalité cherchée.
Q28. Par H.R. on a aussi, $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X', C_{-1})^2\right)\right) \leq \frac{1}{p_-}$.
Par **Q.7**, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right)\right) = \frac{1}{2} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right) | \varepsilon_n = 1\right) + \frac{1}{2} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right) | \varepsilon_n = -1\right)$$

donc, en utilisant **Q.26** et **27**, on obtient l'inégalité cherchée.
Q29. Il suffit de factoriser le second membre de l'inégalité précédente par $\frac{1}{2p_+}$ et

remplacer $\frac{p_-}{p_+}$ par $1-\lambda$ (on a bien $\lambda \in [0,1[$).

Q30. Pour $x \in [0,1[$, on pose : $f(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$. On a :

$$f'(x) = \frac{-x(x^2+x-4)}{x^2-4} - \ln(1-x) \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{x(x^4+24-8x(x+1))}{(x^2-4)^2(1-x)}$$

Pour tout $x \in [0,1[$, $f''(x) \geq 0$ donc f' est $\nearrow$ sur $[0,1[$ donc, pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) \geq f'(0) = 0$, donc f est $\nearrow$ sur $[0,1[$, d'où pour tout $x \in [0,1[$, on a $f(x) \geq f(0) = 0$.

Q31. L'inégalité précédente s'écrit aussi

$$\frac{x^2}{2} + \ln\left((1-x)^{x-1}\right) \leq \ln\left(\frac{4}{x-1} - 1\right)$$

En appliquant l'exponentielle, on obtient l'inégalité cherchée.

Q32. D'après **Q.29**, **Q.29** et **Q.31**, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leq \frac{4}{2p_+(2-\lambda)} = \frac{2}{p_+ + p_-} = \frac{1}{\mathbb{P}(X \in C)}$$

Q33.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d(X,C) \geq t) &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \geq \exp(\frac{t^2}{8})\right) \qquad \text{(par bijectivité)} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)}{\exp(\frac{t^2}{8})} \qquad \text{(par l'inégalité de Markov)} \\
&\leq \frac{\exp(\frac{-t^2}{8})}{\mathbb{P}(X \in C)} \qquad \text{(par l'inégalité (II.1))}
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité de Talagrand.

Q34. • Soient $(M,N) \in C^2$ et $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
g(\lambda M + (1-\lambda)N) &= \|\lambda M + (1-\lambda)N\| \\
&\leq \lambda\|M\| + (1-\lambda)\|N\| \\
&= \lambda g(M) + (1-\lambda)g(N) \\
&\leq \lambda r + (1-\lambda)r = r
\end{aligned}$$

• g est continue par composition de la norme $\|.\|$ (qui est continue car Lipshitzienne) et $M \mapsto Mu$ (qui est continue car linéaire en dimension finie).

• $C = g^{-1}([0,r])$ est fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue.

Q35. Soit $M=(m_{i,j})_{1\le i\le k,1\le j\le d}$. On a $\|M\|_F=\left(\sum_{1\le j\le d}\sum_{1\le i\le k}m_{i,j}^2\right)^{1/2}$

et $\|Mu\|=\sum_{1\le i\le k}\left(\sum_{1\le j\le d}m_{i,j}u_j\right)^2$. Par l'inégalité de Cauchy-schartz, on a

$$\forall i=1,...,k\ ,\ \left(\sum_{1\le j\le d}m_{i,j}u_j\right)^2\le\sum_{1\le j\le d}m_{i,j}^2\underbrace{\sum_{1\le j\le d}u_j^2}_{=\|u\|^2=1}=\sum_{1\le j\le d}m_{i,j}^2$$

d'où $\quad \|\ Mu\|^2\le\|M\|_F^2.$

Q36. Supposons que $d(M,C)<t$.
Soit $N\in C$ tel que $d(M,C)=\|M-N\|_F$. On a :

$$\begin{aligned}
g(M) &= \|Mu\| \\
&\le \|(M-N)u\|+\|Nu\| && \text{(par inégalité triangulaire)}\\
&\le \|M-N\|_F+g(N) && \text{(par définition de et }\mathbf{Q.35}\text{)}\\
&< t+r && \text{(par définition de } C \text{ et hypothèse)}
\end{aligned}$$

Q37. Notons que la base canonique $(E_{i,j})$ de E est orthonormée relativement au produit scalaire $\langle .|.\rangle$ et que $X=\sum_{i,j}\varepsilon_{i,j}E_{i,j}$.
Par **Q36.**, on a : $(g(X)\ge r+t)\subseteq(d(X,C)\ge t)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(g(X)\le r).\mathbb{P}(g(X)\ge r+t) &\le \mathbb{P}(g(X)\le r).\mathbb{P}(d(X,C)\ge t)\\
&= \mathbb{P}(X\in C).\mathbb{P}(d(X,C)\ge t) && \text{(par définition de } C\text{)}\\
&\le \exp(\frac{-t^2}{8}) && \text{(par théorème de Talagrand)}
\end{aligned}$$

Q38. Notons que G est la fonction de répartition de $g(X)$. En utilisant la définition de la limite, on montre que $\lim_{t\to-\infty}G(t)=0$ entraîne que $G^{-1}([\frac{1}{2},1])$ est minorée et que $\lim_{t\to+\infty}G(t)=1$ entraîne que $G^{-1}([\frac{1}{2},1])$ n'est pas vide. D'où l'existence de

$$m:=\inf\left(G^{-1}([\frac{1}{2},1])\right)$$

Pour tout $t\ge m$, $G(t)\ge\frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(g(X)\le m)=G(m)=\lim_{t\to m^+}G(t)\ge\frac{1}{2}$
d'autre part, pour tout $t<m$, $G(t)<\frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(g(X)<m)=\lim_{t\to m^-}G(t)\le\frac{1}{2}$

puis $\mathbb{P}(g(X) \geq m) \geq \frac{1}{2}$.

Q39. On a $\mathbb{P}(|g(X) - m| \geq t) = \mathbb{P}(g(X) - m \geq t) + \mathbb{P}(g(X) - m \leq -t)$.
Par **Q37.**, on a

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(g(X) \geq m + t) \leq \mathbb{P}(g(X) \geq m + t).\mathbb{P}(g(X) \leq m) \leq \exp(\frac{-t^2}{8})$$

et aussi

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(g(X) \leq m - t) \leq \mathbb{P}(g(X) \leq m - t).\mathbb{P}(g(X) \geq m - t + t) \leq \exp(\frac{-t^2}{8})$$

d'où l'inégalité cherchée.

Q40.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((g(X) - m)^2\right) &= 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|g(X) - m| \geq t)dt && \text{(par } \textbf{Q8.}\text{)}\\
&\leq 8\int_0^{+\infty} t\exp(\frac{-t^2}{8})dt && \text{(par } \textbf{Q39.}\text{)}\\
&= 32
\end{aligned}$$

Q41. On a : $g(X)^2 = \|X.u\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_{i,j}u_j\right)^2$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)^2) &= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}u_j\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{d}\underbrace{\varepsilon_{i,j}^2}_{=1 p.s.} u_j^2 + 2\sum_{1\leq j<j'\leq d}\varepsilon_{i,j}u_j\varepsilon_{i,j'}u_{j'}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{d}u_j^2}_{=\|u\|^2=1}\right) + 2\sum_{1\leq j<j'\leq d}u_ju_{j'}\mathbb{E}\left(\underbrace{\varepsilon_{i,j}\varepsilon_{i,j'}}_{\text{2 var indépendantes}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}1 + 2\sum_{1\leq j<j'\leq d}u_ju_{j'}\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{i,j})}_{\text{nulle}}\underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_{i,j'})}_{\text{nulle}}\\
&= k
\end{aligned}$$

Pour l'autre partie de la question, le résultat de **Q6.** permet d'écrire :

$$\mathbb{E}(\underbrace{g(X)}_{\text{positive}}) = \mathbb{E}(g(X).1) \leq \left(\mathbb{E}(g(X)^2)\right)^{1/2}.\left(\mathbb{E}(1)\right)^{1/2} = \sqrt{k}$$

Q42.

$$(\sqrt{k}-m)^2 = k - 2\sqrt{k}m + m^2 \leq \mathbb{E}(g(X)^2) - 2m\mathbb{E}(g(X)) + m^2 = (\mathbb{E}(g(X)) - m)^2$$

Q43. On pose : $Y = g(X) - m$, $a = 4$, $b = \frac{1}{8}$ et $\delta = m - \sqrt{k}$.
D'après **Q39.**, la variable aléatoire Y est à queue sous-gaussienne et par **Q40.** et **Q42.**, on a $|\delta| \leq \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{32}$. On applique l'étude de la partie **I.D** sur Y, les questions **Q12.** et **Q13.** permettent d'écrire que

$$\forall t \geq 0 \ , \ \mathbb{P}(|Y+\delta| \geq t) \leq a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$$

autrement dit

$$\forall t \geq 0 \ , \ \mathbb{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq t) \leq 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$$

Q44.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\|A_k.u\| - 1| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|\|A_k.u\| - 1| \geq \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(\frac{1}{\sqrt{k}}|\|X.u\| - \sqrt{k}| \geq \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(|g(X) - \sqrt{k}| \geq \varepsilon\sqrt{k}) \\
&\leq 4\exp(4)\exp\left(\frac{-\varepsilon^2 k}{16}\right) \\
&\leq 4\exp(4)\exp\left(\frac{-\varepsilon^2 \frac{160\ln(\frac{1}{\delta})}{\varepsilon^2}}{16}\right) \\
&= 4\exp(4)\delta^{10} \\
&< \delta.\frac{e^4}{2^7} < \delta.\frac{3^4}{2^7} = \delta.\frac{81}{128} < \delta
\end{aligned}$$

Q45. Pour $1 \leq i < j \leq N$, on pose $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$. On a : u est unitaire et

$$\begin{aligned}
\overline{E_{i,j}} &= \{\|A_k.(v_i - v_j)\| > (1+\varepsilon)\|v_i - v_j\|\} \cup \{\|A_k.(v_i - v_j)\| < (1-\varepsilon)\|v_i - v_j\|\} \\
&= \{\|A_k.u\| > 1+\varepsilon\} \cup \{\|A_k.u\| < 1-\varepsilon\} \\
&= \{\|A_k.u\| - 1 > \varepsilon\} \cup \{\|A_k.u\| - 1 < -\varepsilon\} \\
&= \{|\|A_k.u\| - 1| > \varepsilon\}
\end{aligned}$$

d'où $\quad \mathbb{P}(\overline{E_{i,j}}) = \mathbb{P}(|\|A_k.u\| - 1| > \varepsilon) < \delta \quad$ (d'après **Q44.**)

Q46. On a :

$$
\begin{aligned}
1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\le i<j\le N} E_{i,j}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{1\le i<j\le N} E_{i,j}}\right)\\
&= \mathbb{P}(\bigcup_{1\le i<j\le N} \overline{E_{i,j}})\\
&\le \sum_{1\le i<j\le N} \mathbb{P}(\overline{E_{i,j}})\\
&< \sum_{1\le i<j\le N} \delta = \frac{N(N-1)\delta}{2}
\end{aligned}
$$

d'où l'inégalité cherchée.

Q47. Si on prend δ assez petit et $k \ge \frac{-160\ln\delta}{\varepsilon^2}$ ($C = \frac{-160\ln\delta}{\ln N}$ convient), on aura l'existence d'une $\varepsilon-$isométrie A_k pour $v_1, ..., v_N$ avec une probabilité assez proche de 1.

Pour vos remarques, contactez moi sur "taoufiki-maths@hotmail.fr