Correction

d'après Mines de Sup 1997.

a. Δ est clairement linéaire et puisque la dérivée d'une fonction de classe loi de composition interne et aussi un e fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'application Δ est définie de F vers F. C'est donc un endomorphisme de F. Ce n'est pas un automorphisme puisque cette application n'est pas injective, en effet son noyau est formée des fonctions constantes.

b. Par définition, une fonction solution de l'équation $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$ est au moins 4 fois dérivable. Or $y^{(4)}=-(2y^{(2)}+y)$ est au moins deux fois dérivable et donc y est 6 fois dérivable et donc $y^{(4)}$ est 4 fois dérivable,… Par récurrence, on montre que y est $2n$ fois dérivable pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et on conclut.

1. De par sa définition : $E=\text{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)$, cela assure que E est un sous-espace vectoriel et que $\mathcal{B}$ en est une famille génératrice. Supposons $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4=0$. En évaluant en 0 on obtient $\lambda_3=0$.
En évaluant ensuite en π, on obtient $\lambda_4=0$. En évaluant en $\pi/2$ et en $-\pi/2$: $\lambda_1+\frac{\pi}{2}\lambda_2=0$ et $-\lambda_1+\frac{\pi}{2}\lambda_2=0$ donc $\lambda_1=\lambda_2=0$. Finalement la famille $\mathcal{B}$ est libre c'est bien une base de E.

2.a $D(f_1)=f_3$, $D(f_2)=f_1+f_4$, $D(f_3)=-f_1$ et $D(f_4)=-f_2+f_3$ donc
$D(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=(b-c)f_1-df_2+(a+d)f_3+bf_4\in E$. Ainsi $D:E\to E$, de plus D est clairement linéaire par restriction d'une application linéaire donc D est un endomorphisme de E.

2.b $D(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=0$ conduit au système $\begin{cases} b-c=0\\ -d=0\\ a+d=0\\ b=0\end{cases}$ de seule solution $a=b=c=d=0$. Ainsi
$\ker D=\{0\}$ et D est un endomorphisme injectif. Or $\dim E=4<+\infty$ donc D est bijectif.

3.a $D^2(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=D((b-c)f_1-df_2+(a+d)f_3+bf_4)$
donc $D^2(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=-(a+2d)f_1-bf_2+(2b-c)f_3-df_4$.
puis $(D^2+\text{Id})(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=-2df_1+2bf_3$.
$(D^2+\text{Id})(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=0\Leftrightarrow b=d=0$ donc $\ker(D^2+\text{Id})=\text{Vect}(f_1,f_3)$.
La famille (f_1,f_3) étant libre, c'est une base de $\ker(D^2+\text{Id})$.
$(D^2+\text{Id})(af_1+bf_2+cf_3+df_4)=-2df_1+2bf_3\in\text{Vect}(f_1,f_3)$ donc $\text{Im}(D^2+\text{Id})\subset\text{Vect}(f_1,f_3)$.
Par le théorème du rang : $\dim\text{Im}(D^2+\text{Id})=4-\dim\ker(D^2+\text{Id})=2$ donc $\text{Im}(D^2+\text{Id})=\text{Vect}(f_1,f_3)$ et (f_1,f_3) est une base de $\text{Im}(D^2+\text{Id})$.

3.b $D^4+2D^2+\text{Id}=(D^2+\text{Id})\circ(D^2+\text{Id})$ et $\text{Im}(D^2+\text{Id})\subset\ker(D^2+\text{Id})$ donc $D^4+2D^2+\text{Id}=0$.

3.c $D\circ(-D^3-2D)=I$ et $\dim E<+\infty$ donc D est un automorphisme de E et $D^{-1}=-D^3-2D$.

4.a Par définition $V=\text{Vect}(\text{Id},D)$. Supposons $\alpha\,\text{Id}_E+\beta D^2=0$. En évaluant cette relation en f_2, on obtient $\alpha f_2+\beta(-f_2+2f_3)=0$ qui donne $\alpha=\beta=0$. La famille (Id_E,D^2) est libre, c'est donc une base de V.

4.b $\forall\varphi,\psi\in V$, on peut écrire $\varphi=\alpha\,\text{Id}_E+\beta D^2$ et $\psi=\gamma\,\text{Id}_E+\delta D^2$. On a alors
$\varphi\circ\psi=\alpha\gamma\,\text{Id}_E+(\alpha\delta+\beta\gamma)D^2+\beta\delta D^4=(\alpha\gamma-\beta\delta)\text{Id}_E+(\alpha\delta+\beta\gamma-2\beta\delta)D^2\in V$ car $D^4=-\text{Id}_E-2D^2$.

4.c On reprend les notations ci-dessus
$M(\lambda\varphi+\mu\psi)=M((\lambda\alpha+\mu\gamma)\text{Id}_E+(\lambda\beta+\mu\delta)D^2)=(\lambda\alpha+\mu\gamma)-(\lambda\beta+\mu\delta)$ donc
$M(\lambda\varphi+\mu\psi)=\lambda(\alpha-\beta)+\mu(\gamma-\delta)=\lambda M(\varphi)+\mu M(\psi)$. De plus $M:V\to\mathbb{R}$ donc M est une forme linéaire sur V.
$M(\varphi\circ\psi)=(\alpha\gamma-\beta\delta)-(\alpha\delta+\beta\gamma-2\beta\delta)=\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta=(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=M(\varphi)M(\psi)$.

5.a C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines i et $-i$. Les solutions de cette équation différentielle sont donc les $x\mapsto\lambda\cos x+\mu\sin x$.

5.b Déterminer le noyau de $\Delta^2+\mathrm{Id}_F$ équivaut à la résolution ci-dessus. On obtient donc $\ker(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)=\mathrm{Vect}(f_1,f_3)$.

5.c Par l'étude qui précède on peut déjà affirmer $E=\ker(D^2+\mathrm{Id}_E)^2\subset\ker(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)^2$.

Inversement si $y\in\ker(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)^2$ alors $(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)(y)\in\ker(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)$ donc $y''+y\in\mathrm{Vect}(f_1,f_3)$.

$y''+y=f_1$ a pour solution particulière $-\dfrac{1}{2}f_4$.

$y''+y=f_3$ a pour solution particulière $\dfrac{1}{2}f_2$

donc $y''+y=\lambda f_1+\mu f_3$ a pour solution générale : $\alpha f_1+\dfrac{\mu}{2}f_2+\beta f_3-\dfrac{\lambda}{2}f_4$.

Ainsi, si $y\in\ker(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)^2$ alors $y\in E$. Par double inclusion l'égalité.

Bien entendu la détermination de $\ker(\Delta^2+\mathrm{Id}_F)^2$ équivaut à la résolution de l'équation $y^{(4)}+2y^{(2)}+y=0$.