

Propagation d'une information

Préliminaire

Etablir que pour tout x de l'intervalle $] -1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

Objectifs et notations

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus où N est un entier naturel strictement supérieur à 3. On désignera par le réel t positif la variable représentant le temps.

On suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$) une seule personne parmi cette population est informée. L'information circule au sein de cette population et lorsqu'une personne est informée à l'instant t elle le reste indéfiniment.

Pour tout réel x , $[x]$ désignera la partie entière de x , c'est à dire l'unique entier relatif k tel que $k \leq x < k+1$, et la fonction \ln représentera la fonction logarithme népérien.

Partie I : Premier modèle de propagation

Soit C un réel strictement positif. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \frac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit \mathbb{N} . Pour tout n , on note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.

On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C\Delta(1 - u_n(\Delta))$$

On pose $u_0(\Delta) = \frac{1}{N}$.

- 1.a Exprimer $1 - u_{n+1}(\Delta)$ en fonction de $1 - u_n(\Delta)$.
- 1.b Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\Delta)$.
2. Soit t un réel fixé strictement positif. Le rapport $\frac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ .
 - 2.a Comparer $\left\lfloor \frac{t}{\Delta} \right\rfloor \Delta$, t et $\left(\left\lfloor \frac{t}{\Delta} \right\rfloor + 1 \right) \Delta$. Déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta \left\lfloor \frac{t}{\Delta} \right\rfloor$.
 - 2.b Déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\lfloor t/\Delta \rfloor}(\Delta)$.
3. On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t , où t est un réel positif, par $f(t)$, f étant une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R}^+ . On fait l'hypothèse que l'accroissement instantané de la proportion de personnes informées est déterminé par l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = C(1 - f(t)).$$

Déterminer la fonction f sachant que $f(0) = \frac{1}{N}$.

Partie II : Second modèle de propagation

On désigne toujours par C une constante réelles strictement positive. On considère un intervalle de temps Δ strictement positif et tel que $\Delta < \frac{1}{C}$, ainsi que les instants $n\Delta$, où l'entier n décrit \mathbb{N} . Pour tout n , on note $v_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$.

On fait l'hypothèse que l'augmentation de cette proportion entre les instants $n\Delta$ et $(n+1)\Delta$ est déterminée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1}(\Delta) - v_n(\Delta) = C\Delta v_n(\Delta) \cdot (1 - v_n(\Delta)).$$

On pose $v_0(\Delta) = \frac{1}{N}$.

1.a Pour tout entier naturel n , exprimer $1 - v_{n+1}(\Delta)$ en fonction de $1 - v_n(\Delta)$ et de $1 - C\Delta v_n(\Delta)$.

1.b Montrer que la suite $(v_n(\Delta))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{N}, 1\right]$.

1.c Etudier la convergence de $\ln x_{k+1} - \ln x_k = \ln \frac{x_{k+1}}{x_k} = \ln \frac{1 - v_{n+1}(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 - C\Delta)} = \ln \frac{1 - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta}$ et déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\Delta)$.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la rapidité de diffusion de l'information.

2.a Montrer que pour tout entier naturel n : $1 - v_{n+1}(\Delta) \leq q(1 - v_n(\Delta))$ avec $q = 1 - \frac{C\Delta}{N}$.

2.b En déduire que $1 - v_n(\Delta) \leq \frac{N-1}{N} q^n$.

2.c On pose pour tout entier naturel n , $x_n = \frac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$.

Etablir que pour tout entier naturel k : $\ln x_{k+1} - \ln x_k = \ln \frac{1 - C\Delta v_k(\Delta)}{1 - C\Delta}$

En déduire que $0 \leq \ln x_{k+1} - \ln x_k \leq \frac{C\Delta}{1 - C\Delta} \frac{N-1}{N} q^k$.

On pourra exploiter le résultat du préliminaire.

2.d On pose pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln x_{k+1} - \ln x_k)$.

Montrer que la suite (S_n) converge. On pose $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

2.e Déduire des questions précédentes l'existence d'un réel μ strictement positif tel que :

$$1 - v_n(\Delta) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mu(1 - C\Delta)^n.$$

On explicitera la valeur de μ en fonction de S et de $\frac{1 - C\Delta v_n(\Delta)}{1 - C\Delta} \geq 1$.

3. On pose pour tout entier naturel n , $y_n = \frac{v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}$.

3.a Montrer que pour tout entier naturel k : $\frac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \frac{C^2 \Delta^2 v_k(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_k(\Delta))}$.

3.b En considérant $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln y_{k+1} - \ln y_k$, établir que : $0 \leq \ln \left(\frac{(N-1)v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n} \right) \leq n \frac{C^2 \Delta^2}{1 - C\Delta}$.

3.c Déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0} v_{\lfloor t/\Delta \rfloor}(\Delta)$.

4. On suppose dans cette question que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant t , où t est un réel positif, par $g(t)$, g étant une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+ *$. On fait l'hypothèse que l'accroissement instantané de la proportion de personnes informées est déterminé par l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, g'(t) = Cg(t)(1 - g(t)).$$

En considérant la fonction h définie par $h(t) = \frac{1}{g(t)}$, déterminer l'expression de $g(t)$ pour tout réel t positif sachant que $g(0) = \frac{1}{N}$.