Suites

Exercice 1 Soit (u_n) et (v_n), deux suites convergeant respectivement vers α et β.
On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n = \min(u_n, v_n)$ et $M_n = \max(u_n, v_n)$: ces deux suites convergent-elles nécessairement ? Si oui, préciser leurs limites.

Exercice 2 Soit $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.
Prouver : $\forall n \geq 2,\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n-1}$. En déduire la limite de (u_n) et un équivalent simple.

Exercice 3 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$.

Montrer l'équivalence : u converge $\Leftrightarrow$ u est stationnaire.

Exercice 4

Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$. Montrer que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 0.

Justifier alors qu'il existe un entier N tel que : si $n \geq N$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$.
Monotonie de (u_n) ? En déduire, par l'absurde, que (u_n) converge vers 0.

Exercice 5 Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
En déduire la limite de la suite (u_n) où $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 6 On définit la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Prouver que la suite u est bornée et monotone. Que peut-on en déduire ?

2.Justifier l'encadrement : $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t.$

En déduire la valeur de $\lim u$.

Exercice 7

1. Montrer : $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que (u_n) puis (v_n) convergent.

Exercice 8 Soit a et b, deux réels tels que $0 < a < b$.
Calculer la limite de la suite u définie par $u_n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$.

Exercice 9 Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\sqrt{n+1}\cos(n) - n$ 2. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ 3. $\dfrac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} e^{-k}$

Exercice 10 *(théorème de Césaro)*

1. Montrer que, si (u_n) est une suite convergente de limite L, alors la suite (v_n) est également une suite convergente de limite L où $v_n = \dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}$.
   Vérifier que la réciproque est fausse en étudiant le cas $u_n = (-1)^n$.
2. Montrer que, si (w_n) est une suite vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_{n+1}-w_n) = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{w_n}{n} = L$.

Exercice 11 Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. En déduire la convergence de (u_n) où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

Exercice 12 *(Constante d'Euler)*

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ (raisonner à l'aide d'intégrale).
2. En déduire que la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ est décroissante et positive. Conclusion ?

Exercice 13 Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

Etudier alors la convergence de la suite (v_n) où $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$.

On définit (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$. Donner un encadrement de la suite (u_n) utilisant des termes de la suite (v_n). Que peut-on en déduire concernant la convergence de (u_n) ?

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{u_k}$: simplifier S_n et déduire $S_n \sim u_n$.

Exercice 15 Soit (u_n) une suite définie par : u_0 quelconque et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}$.
Montrer que la suite diverge vers $+\infty$.
En remarquant que $u_n^2 = u_0^2 + n$, déterminer un équivalent simple de u_n.

SUITES EXTRAITES

Exercice 16 On pose $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$.

1. Simplifier la suite a où $a_n = u_{n^2}$.
2. Simplifier la suite b où $b_n = u_{n^2+3n}$: on pourra utiliser l'encadrement $(n+1)^2 \leq n^2+3n < (n+2)^2$.
3. Que peut-on en déduire concernant la convergence de la suite u ?

Exercice 17 Sur l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$\forall(u,v) \in E^2$, $u\mathcal{R}v$ si u est une suite extraite de v. $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre sur E ?
Indication : étudier le cas des suites u et v avec $u_n = (-1)^n = v_{n+2}$ et $v_n = (-1)^{n+1} = u_{n+1}$.

Exercice 18

1. Montrer que si (u_n) est une suite convergente, alors $(u_{2n} - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Conclusion concernant la suite (S_n) ?

SUITES ADJACENTES

Exercice 19 On définit : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (pour $n \geq 1$).

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $u_n < \ell < v_n$.
3. On suppose que $\ell = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$: on pose $A = -q!u_q + (q-1)!p$.

   Justifier que A est un entier et que $0 < A < \frac{1}{q}$. Conclure à une absurdité. Qu'a-t-on prouvé ?

Exercice 20 Montrer que les suites suivantes sont adjacentes et conclure :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Exercice 21 Soit deux réels $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ , pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n \leq v_n$. En déduire les monotonies de ces deux suites.
2. Prouver que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

SUITES RECURRENTES

Exercice 22 Pour $n \geq 2$: $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, en déduire une expression de u_n et la convergence de u_n.

Exercice 23 Soit $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{8 + 2u_n}$.

1. Prouver : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. **SI** (u_n) converge, quelle est sa limite ℓ ? Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{32}|u_n - \ell|$.
3. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 24 Soit $u_0 < u_1$, deux réels fixés, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

1. $1^{\text{ère}}$ méthode : on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que cette suite v est géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
2. 2^{nde} méthode : on pose $w_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$. Montrer que cette suite w est constante. Retrouver une expression de u_n en fonction de n.