Ensembles - Applications -Relations

Exercice 1 :

1) Donner la négation de chacune des assertions suivantes :
   a) $\exists a \succ 0,\ \exists b \succeq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ na \prec b$
   b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \notin B$
2) Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   a) f s'annule sur $\mathbb{R}$.
   b) f est l'application nulle.

Exercice 2 :

Soient E ensemble et A, B et C trois parties de E.

1) Montrer que : $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
2) Donner un exemple dont $A \cap B = A \cap C$ n'implique pas $B = C$.
3) Donner un exemple dont $A \cup B = A \cup C$ n'implique pas $B = C$.
4) On définit la *différence symétrique* Δ par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que
   a) $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
   b) $\overline{A\Delta B} = A\Delta\overline{B} = \overline{A}\Delta B$
   c) $A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(\overline{A} \cap C)$
   Indice : vous pouvez considérer le complémentaire ...

Exercice 3 :

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. Notons χ_A la fonction caractéristique (ou indicatrice) de A.

1) Montrer que :
   a) $A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B$.
   b) $A \subset B \Longleftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$.
2) Déterminer χ_A^2 et $\chi_{\overline{A}}$ en fonction de χ_A.
3) Montrer que
   a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$.
   b) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.
   c) Si A et B sont disjoints alors

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$$

   d) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$.

4) Déduire $\chi_{A\Delta B}$ en fonction de χ_A et χ_B.

5) Montrer que pour tout A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 4 :

Soient A, B et C trois parties de E. Montrer que :

1) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

3) $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$

4) $\begin{cases} A \cup C = A \cup B \\ A \cap C = A \cap B \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

5) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

6) $A \cap C = A \cup B \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

7) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$

8) $\begin{cases} A \setminus B = A \setminus C \\ B \setminus A = C \setminus A \end{cases} \Rightarrow B = C$

Exercice 5 :

Soient E un ensemble et $f \in E^E$ vérifiant $f^3 = f$; càd $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que

$$f \textit{ est injective} \Leftrightarrow f \textit{ est surjective}$$

Exercice 6 :

Soient E , F et G trois ensembles. Soient $f \in F^G$ et $g \in E^F$. Montrer que :

1) $g \circ f$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective*

2) $g \circ f$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective*

3) ($g \circ f$ *injective et* f *surjective*) $\Rightarrow g$ *injective*

4) ($g \circ f$ *surjective et* g *injective*) $\Rightarrow f$ *surjective*

Exercice 7 :

Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

1) Montrer que :

   a) $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$

   b) $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$

2) Montrer que

   a) f *injective* $\Leftrightarrow \big(\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))\big)$

   b) f *surjective* $\Leftrightarrow \big(\forall B \in \mathscr{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B\big)$

3) Montrer que
   a) f *injective* $\Leftrightarrow (\forall A, A' \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'))$
   b) f *bijective* $\Leftrightarrow \left(\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}\right)$

Exercice 8 :

1) Soient E , F, G et H quatres ensembles. Soient $h \in E^F$ et $g \in F^G$ et $f \in G^H$. Montrer que :

$$(g \circ f \ et \ h \circ g \ sont \ bijectives) \Rightarrow (f, g \ et \ h \ sont \ aussi \ bijectives)$$

2) Soient $f,\ g\ et\ h \in E^E$ telles que $h \circ g \circ f$ et $f \circ g \circ h$ soient bijectives. Montrer que f, g et h sont aussi bijectives.

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre :

1) $\mathscr{R}$ est la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow |x - x'| \preceq |y - y'|$$

2) $\mathscr{R}$ est la relation binaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \preceq x' \ et \ y \preceq y')$$

3) $\mathscr{R}$ est la relation binaire définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p\mathscr{R}q \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ q = p^n)$$

Exercice 10 :

Soient E un ensemble et $(F, \mathscr{R})$ un ensemble ordonné. Soit $\prec$ une relation sur F^E définie par :

$$\forall f, g \in F^E :\ f \prec g \Longleftrightarrow (\forall x \in E)\ f(x)\ \mathscr{R}\ g(x)$$

1) Montrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre sur F^E.
2) On considère l'ensemble $A = \left\{x \mapsto x + 1, x \mapsto x^2\right\}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   Etudier l'existence de son plus grand élément.

Exercice 11 :

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Soit $\mathscr{R}$ la relation sur E définie par :

$$x\ \mathscr{R}\ y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2) Décrire les classes d'équivalences dans les cas suivants :
   (a) $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos(x)$.
   (b) $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3$.
3) Préciser à quelle condition $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.