Exercice 2 :

Quels sont les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$?

$(\mathbb{C}^*, \times)$

Soit H s-gr fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Notons $\boxed{n = \mathrm{Card}(H)}$.

et $(H, \times)$ groupe

Donc : $(\forall z \in H,\ z^n = 1)$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow \forall z \in H,\ z \in \mathbb{U}_n$

$\Rightarrow \boxed{H \subset \mathbb{U}_n}$

Donc $H = \mathbb{U}_n$ car $\left\{ \begin{array}{l} H \subset \mathbb{U}_n \\ \text{et} \\ \mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(\mathbb{U}_n) \end{array} \right.$

Réciproque : Vrai

C/C : $\boxed{\text{Les sous-gr de } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ sont les } \mathbb{U}_n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.}$

Rappel : A et B ens finis. On a :

$$\left(\begin{array}{l} A \subset B \\ \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) \end{array}\right) \Rightarrow A = B$$

analogue à ?

Si F et G 2 sev de E de dim finies

$$\left(\begin{array}{l} F \subset G \\ \dim(F) = \dim G \end{array}\right) \Rightarrow F = G$$

Rappel

A et B ensembles.

A et B sont équipotents s'il existe une bijection entre eux.

Rappel

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble E.

Soit $a \in E$.

$\bar{a}$, la classe d'équivalence de a est défini par :

$$\bar{a} = \{x \in E \,/\, xRa\}$$

$\boxed{\bar{a} \text{ noté } cl(a)}$

Exercice 4 :

Soit $(G, \cdot)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal n.
Soit H un sous-groupe de G. Notons $card(H) = p$.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in H$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G.
2) Soient $g \in G$ et $\overline{g}$ sa classe d'équivalence.
   i) Expliciter $\overline{g}$.
   ii) Montrer que $\overline{g}$ est équipotent à H.
3) Déduire que $p|n$.
   *C'est le **théorème de Lagrange**.*
4) En déduire le résultat du cours :

$$\forall g \in G,\ g^n = e$$

Sym : $x\mathcal{R}y \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$
$\Rightarrow (x \cdot y^{-1})^{-1} \in H$
$\Rightarrow (y^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} \in H$
$\Rightarrow y \cdot x^{-1} \in H$
$\Rightarrow y\mathcal{R}x$

Rappel : $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

$x \in \overline{g} \overset{\text{par déf}}{\Leftrightarrow} x\mathcal{R}g$
$\Leftrightarrow x \cdot g^{-1} \in H$
$\Leftrightarrow (\exists h \in H,\ x \cdot g^{-1} = h)$
$\Leftrightarrow (\exists h \in H,\ x = hg)$
$\Leftrightarrow x \in Hg$, où $Hg = \{hg \,/\, h \in H\}$

$\boxed{\overline{g} = Hg}$

inspired

$n\mathbb{Z} = \{nk \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

$x \in \overline{g} \Leftrightarrow x \in\ ?$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

Rappel

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Si $a, b \in G$, groupe

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.
Soit $a \in G$. On a
$\{ax / x \in G\} = G$.

à savoir

l'utiliser sans démo!

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.
Soit $a \in G$. On a
$\{ax / x \in G\} = G$.

Démo :

" $\subset$ " : OK

" $\supset$ " Soit $t \in G$.

On a $t = a \cdot \underbrace{(a^{-1} \cdot t)}_{\in G} \in \{ax / x \in G\}$