

## Exercice 2 :

Quels sont les sous-groupes finis de  $\mathbb{C}^*$  ?

$(\mathbb{C}^*, x)$

Soit  $H$   $n$ -er oin de  $(\mathbb{C}^*, x)$ .

Notons  $n \leq \text{Card}(H)$ .

$\text{er}(H, x)$  groupe

Donc:  $(\forall z \in H, z^n = 1)$  ★



$\Rightarrow \forall z \in H, z \in \underbrace{\mathbb{C}^*}_n$  ★

$\Rightarrow H \subset \underbrace{\mathbb{C}^*}_n$

Donc  $H = \underbrace{\mathbb{C}^*}_n$

Car ★  $\left. \begin{array}{l} H \subset \underbrace{\mathbb{C}^*}_n \\ \text{er} \\ \text{Card}(H) = \text{Card}(\underbrace{\mathbb{C}^*}_n) \end{array} \right\}$

Réponse: Vrai

C/c: Les sub-gr de  $(\mathbb{C}^*, x)$  sont  
de la forme  $\underbrace{\mathbb{C}^*}_n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Rappel: A et B ensembles finis. On a :

$$\left( \begin{array}{l} A \subset B \\ \text{Card}(A) = \text{Card}(B) \end{array} \right) \Rightarrow A = B$$

analogue à ↓

Si F et G 2 sous E de dim finie

$$\left( \begin{array}{l} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{array} \right) \Rightarrow F = G$$

Rappel

---

$A$  et  $B$  ensembles.

$A$  et  $B$  sont équipotents s'il existe une  
bijection entre eux.

---

## Rappel

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ .

Soit  $a \in E$ .

$\bar{a}$ , la classe d'équivalence de  $a$  est défini par :

$$\bar{a} = \{ x \in E \mid x R a \}$$

$$\bar{a} \text{ noté } cl(a)$$

**Exercice 4 :**

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe multiplicatif fini, de neutre  $e$  et de cardinal  $n$ .  
 Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Notons  $\text{card}(H) = p$ .  
 Considérons la relation binaire  $\mathcal{R}$  définie sur  $G$  par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

- 1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur  $G$ .
- 2) Soient  $g \in G$  et  $\bar{g}$  sa classe d'équivalence.
  - i) Expliciter  $\bar{g}$ .
  - ii) Montrer que  $\bar{g}$  est équipotent à  $H$ .
- 3) Déduire que  $p|n$ .  
 C'est le *théorème de Lagrange*.
- 4) En déduire le résultat du cours :

$$\forall g \in G, g^n = e$$

de cardinal  $n \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H$   
 $\Rightarrow (x \cdot y^{-1})^{-1} \in H$   
 $\Rightarrow (y^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} \in H$   
 $\Rightarrow y \cdot x^{-1} \in H$   
 $\Rightarrow y \mathcal{R} x$  □

*par déf*  
 $x \in \bar{g} \Leftrightarrow x \mathcal{R} g$   
 $\Leftrightarrow x \cdot g^{-1} \in H$   
 $\Leftrightarrow (\exists h \in H, x \cdot g^{-1} = h)$   
 $\Leftrightarrow (\exists h \in H, x = hg)$   
 $\Leftrightarrow x \in Hg, \text{ où } Hg = \{hg / h \in H\}$   
 $\bar{g} = Hg$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

$$n\mathbb{Z} = \{nh / h \in \mathbb{Z}\}$$

$$(a \cdot b)^{-1}$$

$$b^{-1} \cdot a^{-1}$$

Proof

$$A, B \in M_n(\mathbb{K})$$

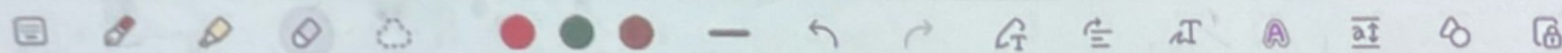
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$$

Si  $a, b \in G$ , groupe

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$





Soit  $(G, \cdot)$  un groupe.

Soit  $a \in G$ . On a

$$\{ax / x \in G\} = G.$$

→ à savoir

utilise le sans démo

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe.  
 Soit  $a \in G$ . On a  
 $\{ax/x \in G\} = G$ .

Démo:

"C": OK  
 "D":

Soit  $t \in G$ .

On a  $t = a \cdot \underbrace{(a^{-1} \cdot t)}_{\in G} \in \{ax/x \in G\}$